J. FRESLON | S. GUGGER | D. FREDON | J. POINEAU | C. MORIN

MATHS MP

EXERCICES INCONTOURNABLES

3e édition

DUNOD

Conception et création de couverture : Hokus Pokus Créations

11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com

ISBN 978-2-10-077737-2

Avant-propos

Cet ouvrage s'adresse aux élèves de deuxième année de classes préparatoires scientifiques de la filière MP. Il leur propose de mettre en pratique les notions abordées en cours de mathématiques par le biais d'exercices, assortis d'une correction détaillée, dans laquelle l'accent est mis sur la méthode qui mène à la solution.

Le livre est divisé en quinze chapitres, chacun étant consacré à une partie du programme. Nous avons regroupé les chapitres selon les thèmes classiques : Algèbre, Topologie, Analyse et Probabilités. Au sein d'un même chapitre, les exercices, classés par ordre croissant de difficulté, ont été choisis de façon à passer en revue les notions à connaître, mais aussi à présenter les techniques susceptibles d'être utilisées.

En ce qui concerne les corrections, nous avons choisi de séparer clairement la réflexion préliminaire, comprenant analyse du problème et tâtonnements, de la rédaction finale, rigoureuse et précise. Cette dernière étape est signalée, dans le texte, par la présence d'un liseré gris sur la gauche et du pictogramme . Insistons sur le fait que nous ne prétendons nullement présenter l'unique cheminement permettant d'aboutir à la solution d'un exercice donné, ni la seule rédaction acceptable. Dans les deux cas, bien des possibilités existent.

Par ailleurs, lorsque nous avons souhaité mettre en lumière un point important, nous l'avons rédigé sur un fond grisé et indiqué par . De même, la présence d'un piège dont il faut se méfier est signalée par .

Nous remercions Sabrina Bergez, qui a collaboré à la réalisation de ce livre en le relisant en détail et en nous faisant bénéficier de ses nombreuses remarques pertinentes.

Table des matières

Algèbre

Topologie

Analyse

Probabilités

Partie 1

Algèbre

Algèbre

CHAPITRE

1 Structures algébriques usuelles

Exercice 1.1 : Groupe engendré par deux éléments

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
Quel est le groupe engendré par A et B ?

Il s'agit d'éléments de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. La loi n'est pas précisée. Mais pour l'addition le groupe engendré serait l'ensemble des matrices $pA + qB$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}$. Il n'y aurait donc aucun problème : c'est le produit de matrices qu'il faut considérer. Le groupe dans lequel on se place est celui des matrices carrées inversibles d'ordre 3.

Lorsqu'il s'agit de groupes usuels, les énoncés ne prendront généralement pas la peine de préciser la loi utilisée. Lorsque deux lois sont possibles, il faut étudier pour laquelle la question posée a le plus de sens.

Le groupe engendré par A et B est le plus petit (au sens de l'inclusion) sous-groupe contenant les deux matrices. Il est constitué par tous les produits possibles avec A, B et leurs inverses. Remarquons que A et B sont bien inversibles puisque $\det A = -1$ et $\det B = 1$.

Le groupe G cherché contient A et B. Il contient aussi $A^2 = I_3$, ce qui implique que $A^{-1} = A$, $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B^3 = I_3$, ce qui implique que l'on a $B^{-1} = B^2$. On en déduit alors que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $A^n \in \{I_3, A\}$ et que pour tout $p \in \mathbb{Z}$, $B^p \in \{I_3, B, B^2\}$.

Il reste à calculer les produits de A et de B. On a $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = AB^2$. Ainsi tout élément de G peut s'écrire sous la

forme $A^n B^p$, $(n,p) \in \mathbb{Z}^2$ (puisqu'on peut commuter A et B en augmentant la puissance de B).
Avec la remarque plus haut, les éléments de G sont les $A^n B^p$ avec $n \in \{0,1\}$ et $p \in \{0,1,2\}$ et

$$G = \{I_3, B, B^2, A, AB, AB^2\}.$$

A et B sont des matrices associées à des permutations des vecteurs de la base canonique (e_1, e_2, e_3) : A est associée à la transposition $\tau_{2,3}$, B au cycle $(1,2,3)$.
Ces deux permutations engendrent $\mathscr{S}_3$, donc G est l'ensemble des six matrices de permutation de la base (e_1, e_2, e_3).

Exercice 1.2 : Centre du groupe symétrique

Démontrer que le centre du groupe symétrique $\mathscr{S}_n$ (c'est-à-dire l'ensemble des éléments de $\mathscr{S}_n$ qui commutent avec tous les éléments de $\mathscr{S}_n$) est réduit à $\{\mathrm{Id}\}$ pour $n \geqslant 3$.

Il faut bien se souvenir que la loi d'un groupe n'est pas, en général, commutative !

Il est clair que Id commute avec tous les éléments de $\mathscr{S}_n$, il faut donc montrer que si une permutation σ commute avec tous les éléments de $\mathscr{S}_n$, c'est l'identité. On raisonne par l'absurde.

Supposons qu'il existe une permutation σ différente de l'identité appartenant au centre de $\mathscr{S}_n$. Il existe alors $a \neq b$ tels que $\sigma(a) = b$.
Introduisons la transposition $\tau_{a,b}$. On a alors : $\sigma \circ \tau_{a,b}(b) = \sigma(a) = b$. Comme σ commute avec tout élément de $\mathscr{S}_n$, on aussi : $\tau_{a,b} \circ \sigma(b) = b$ d'où $\sigma(b) = a$.
Introduisons le cycle $c_{a,b,c}$, avec c distinct de a et b, ce qui est possible car $n \geqslant 3$. On a :

$$\sigma \circ c_{a,b,c}(a) = \sigma(b) = a \text{ et } c_{a,b,c} \circ \sigma(a) = c_{a,b,c}(b) = c.$$

On obtient une contradiction, donc le centre de $\mathscr{S}_n$ est inclus dans $\{\mathrm{Id}\}$. L'inclusion réciproque étant claire, on a le résultat voulu.

Exercice 1.3 : Conjugaison

Soit G un groupe. Pour $a \in G$, on note $f_a : G \to G$, $x \mapsto a^{-1}\, x\, a$.
1. Montrer que pour tout $a \in G$, f_a est un automorphisme de G.
2. Montrer que $\varphi : G \to \mathrm{Aut}(G)$, $a \mapsto f_a$ est un morphisme de groupes.
3. Déterminer le noyau de φ.

1. La loi du groupe G n'est pas précisée, mais vu la définition de f_a, elle est notée comme une multiplication.
Pour $a \in G$, il faut montrer, d'une part que f_a est un morphisme de groupes, d'autre part qu'il est bijectif. Pour le premier point, on vérifie la définition, pour le second on choisit ici de résoudre l'équation $f_a(x) = y$.

Soit $a \in G$. Pour $(x, y) \in G^2$, on a

$$f_a(x)\, f_a(y) = (a^{-1}\, x\, a)\, (a^{-1}\, y\, a) = (a^{-1}\, x)\, (a^{-1}\, a)\, (y\, a) = a^{-1}\, x\, y\, a = f_a(x\, y)$$

par associativité de la multiplication dans G. Ainsi f_a est un endomorphisme du groupe G.
Soit $y \in G$, l'équation $f_a(x) = y$, d'inconnue $x \in G$, équivaut à $a^{-1}\, x\, a = y$, si et seulement si $a\, (a^{-1}\, x\, a) = a\, y$, i.e. $x\, a = a\, y$, i.e. $(x\, a)\, a^{-1} = a\, y\, a^{-1}$, i.e. $x = a\, y\, a^{-1}$. On a donc une unique solution, et f_a est une bijection de G dans G. Ainsi f_a est un automorphisme du groupe G.

2. La loi du groupe $\mathrm{Aut}(G)$ est la loi $\circ$. Il faut donc montrer que pour $(a, b) \in G^2$, $\varphi(a\, b) = \varphi(a) \circ \varphi(b)$, c'est-à-dire $f_{a\, b} = f_a \circ f_b$.

Ici φ est une fonction qui renvoie des fonctions. Il faut bien faire attention au type des objets manipulés, et ne pas confondre argument de φ ou argument de f_a.

Soit $(a, b) \in G^2$. Pour $x \in G$, on a

$$(f_a \circ f_b)(x) = f_a(f_b(x)) = f_a(b^{-1}\, x\, b) = a^{-1}\, b^{-1}\, x\, a\, b = (a\, b)^{-1}\, x\, a\, b = f_{a\, b}(x).$$

Ainsi $f_a \circ f_b = f_{a\, b}$, puis $\varphi(a\, b) = \varphi(a) \circ \varphi(b)$. φ est donc un morphisme de groupes.

3. Le noyau de φ est l'ensemble des éléments de G qui sont envoyés sur le neutre de $\mathrm{Aut}(G)$, ici Id_G. On cherche donc les $a \in G$ tel que $\varphi(a) = \mathrm{Id}_G$.

Le neutre n'est pas toujours le même dans tous les groupes, il faut donc faire attention au neutre du groupe d'arrivée lors d'un calcul de noyau.

Pour $a \in G$, on a $a \in \operatorname{Ker}\varphi$ si et seulement si $\varphi(a) = \mathrm{Id}_G$, c'est-à-dire $f_a = \mathrm{Id}_G$. $a \in \operatorname{Ker}\varphi$ est donc équivalent à $\forall x \in G$, $a^{-1}\, x\, a = x$ i.e. $x\, a = a\, x$. Ainsi $\operatorname{Ker}\varphi$ est le centre de G, c'est-à-dire l'ensemble des éléments a de G qui commutent avec tous les éléments de G.

Exercice 1.4 : Partie génératrice du groupe orthogonal

Soit E un espace euclidien.
1. Soit a et b deux vecteurs distincts de E de même norme. Démontrer qu'il existe une unique réflexion s de E telle que $s(a) = b$ et $s(b) = a$.
2. Montrer que $O(E)$ est engendré par les réflexions.
On pourra montrer par récurrence sur $\dim(E) - \dim(\operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id}_E))$ que f peut s'écrire comme composée de réflexions.

$O(E)$ est le groupe des endomorphismes orthogonaux de E, c'est-à-dire les endomorphismes qui conservent le produit scalaire et la norme.
En première année, on a vu le cas $n = 2$. À cette occasion, il a été démontré que le groupe orthogonal du plan est engendré par les réflexions. C'est cette propriété que l'on va généraliser.

1. Pour montrer l'existence et l'unicité, on va raisonner par analyse/synthèse : comme il est nécessaire d'avoir $s(a - b) = s(a) - s(b) = b - a = -(a - b)$, ceci impose que l'hyperplan de la réflexion soit $(a - b)^{\perp}$.

▶ **Analyse :**
On suppose avoir une réflexion qui convient, et à partir des propriétés qu'elle vérifie, on obtient ses éléments caractéristiques.

Supposons avoir une réflexion s qui échange a et b.
On a alors $a - b \in \operatorname{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$. Or s est une réflexion donc $\operatorname{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$ est une droite et son orthogonal est $\operatorname{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$ qui est de dimension $n - 1$. Ainsi, s est nécessairement la réflexion par rapport à l'hyperplan $(a - b)^{\perp}$, et on a l'unicité.

▶ **Synthèse :**
On pose la forme trouvée à la fin de l'analyse, et on vérifie qu'elle convient bien.

Comme $a \neq b$, on a $a - b \neq 0$. L'orthogonal du vecteur $a - b$ est donc un hyperplan H. Soit s la réflexion par rapport à H. Alors $s(a - b) = -(a - b)$

donc $s(a) - s(b) = b - a$. Par ailleurs,

$$\begin{aligned}\langle a-b|a+b\rangle &= \langle a|a\rangle - \langle b|a\rangle + \langle a|b\rangle - \langle b|b\rangle \\ &= \langle a|a\rangle - \langle b|b\rangle\end{aligned}$$

car $\langle a|b\rangle = \langle b|a\rangle$ (le produit scalaire est symétrique).
Comme a et b sont de même norme, $\langle a|a\rangle = \langle b|b\rangle$, donc $a-b$ et $a+b$ sont orthogonaux ; ainsi, $a+b \in H$ et $s(a+b) = a+b$, soit $s(a)+s(b) = a+b$.
On en déduit $s(a) = b$ et $s(b) = a$ et on a l'existence.

2. Comme donné en indication, on raisonne par récurrence sur l'entier

$$k = \dim(E) - \dim(\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)).$$

L'initialisation correspond donc au cas où $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) = E$, soit $f = \mathrm{Id}_E$, ce qui est facile. Pour l'hérédité, on doit donc trouver, à partir de f, une fonction g telle que $\mathrm{Ker}(g - \mathrm{Id}_E)$ soit strictement plus grand que $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$. Pour utiliser la question 1, on pense alors à échanger a et $f(a)$, si a est un vecteur qui n'est pas dans $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$. On a une réflexion s qui fait ceci, et on va regarder la fonction $g = s \circ f$.
Cependant, pour que g conserve les invariants de f, il faut que a soit orthogonal à $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$.

En algèbre linéaire, le complémentaire d'un espace vectoriel n'a aucun intérêt : ce n'est jamais un espace vectoriel. Il faut donc considérer un supplémentaire (voire le supplémentaire orthogonal dans le cas euclidien).

On note $n = \dim(E)$. Montrons par récurrence sur $k \in \{0, \dots, n\}$ la propriété H_k : « Si $f \in O(E)$ vérifie $\dim(\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)) = n - k$, alors f est composée de réflexions. »

- Soit $f \in O(E)$ tel que $\dim(\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)) = n$. Alors $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) = E$ donc $f = \mathrm{Id}$. f s'écrit donc $s \circ s$ pour n'importe quelle réflexion s, et on a H_0.
- Soit $k \in \{0, \dots, n-1\}$ tel que H_l est vraie pour tous les l entre 0 et k. Soit $f \in O(E)$ tel que $\dim(\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)) = n-k-1$. Alors $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) \neq E$ donc $[\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)]^\perp \neq \{0\}$, et on a $a \in [\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)]^\perp$ tel que $f(a) \neq a$. Notons $b = f(a)$. Alors $a \neq b$ par définition de a et a et b ont même norme car $b = f(a)$ et f est orthogonal. Ainsi, il existe une réflexion s de E telle que $s(a) = b$ et $s(b) = a$, c'est la réflexion par rapport à $(a-b)^\perp$ comme vu au 1. On a donc $(s \circ f)(a) = a$.
  Si $x \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$, on a $\langle x|a\rangle = 0$ donc $\langle x|b\rangle = \langle f(x)|f(a)\rangle = 0$; par suite $\langle x|a-b\rangle = 0$ et donc $s(x) = x$ et $s \circ f(x) = x$. Ainsi, $\mathrm{Ker}(s \circ f - \mathrm{Id}_E)$ est un sous-espace vectoriel de E qui contient $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$. Cette inclusion est stricte puisque $\mathrm{Ker}(s \circ f - \mathrm{Id}_E)$ contient aussi a, qui n'est pas dans $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$. Ainsi $\dim(\mathrm{Ker}(s \circ f - \mathrm{Id}_E)) = n - l$ avec $l \leqslant k$.

Par hypothèse de récurrence, on peut donc écrire $s \circ f$ comme composée de réflexions : $s \circ f = r_1 \circ \ldots \circ r_t$, et alors $f = s \circ r_1 \circ \ldots \circ r_t$ peut s'écrire comme composée de réflexions, donc on a H_{k+1}, ce qui conclut la récurrence.

Exercice 1.5 : Anneau $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$

1. Soit $P = \mathbb{Z} \cup \{\sqrt{2}\}$. Montrer que le sous-anneau de $\mathbb{R}$ engendré par P est :

$$A = \{m + n\sqrt{2}\ ;\ (m,n) \in \mathbb{Z}^2\}.$$

Comme pour les groupes, il s'agit du plus petit sous-anneau de $\mathbb{R}$ contenant P. On note U le groupe des éléments inversibles de A .

2. On pose $N\big(m + n\sqrt{2}\big) = \big|m^2 - 2n^2\big|$. Pour a et b éléments de A, calculer $N(ab)$. Montrer que $z \in U$ si, et seulement si, $N(z) = 1$.

3. Soit $z \in U$ tel que $z = x + y\sqrt{2}$ avec x et $y \in \mathbb{N}$, $x \neq 0$. Montrer qu'il existe un unique $n \in \mathbb{N}$ tel que $(1+\sqrt{2})^n \leqslant z < (1+\sqrt{2})^{n+1}$, puis que $z(1+\sqrt{2})^{-n}$ s'écrit sous la forme $x' + y'\sqrt{2}$ avec x' et $y' \in \mathbb{N}$.

4. Montrer que $U = \big\{ \pm (1+\sqrt{2})^n\ ;\ n \in \mathbb{Z}\big\}$.

1. Comme toujours il faut montrer deux inclusions pour avoir l'égalité d'ensembles voulue. Tout d'abord, le sous-anneau de $\mathbb{R}$ engendré par P contient $\mathbb{Z}$ et $\sqrt{2}$. Il contient donc toutes les sommes, et leurs opposées, que l'on peut obtenir à partir de 1 et de $\sqrt{2}$, c'est-à-dire tous les réels du type $m + n\sqrt{2}$ avec $m \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{Z}$.

Notons B le sous-anneau de $\mathbb{R}$ engendré par P. Alors $1 \in B$ et $\sqrt{2} \in B$. Pour $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$, m est la puissance m-ième de 1 pour la loi $+$, donc est dans B. De même $n\sqrt{2}$ est la puissance n-ième de $\sqrt{2}$ pour la loi $+$, donc est dans B. Par suite $m + n\sqrt{2} \in B$ et $A \subset B$.

Pour montrer l'inclusion réciproque, il suffit de montrer que A est un sous-anneau de $\mathbb{R}$ contenant P. Par minimalité de B, on aura alors $B \subset A$.

Soient $a = m_1 + n_1\sqrt{2}$ et $b = m_2 + n_2\sqrt{2}$ avec $(m_1, n_1, m_2, n_2) \in \mathbb{Z}^4$.
D'une part :

$$a - b = (m_1 - m_2) + (n_1 - n_2)\sqrt{2} \in A$$

car $m_1 - n_1 \in \mathbb{Z}$ et $m_2 - n_2 \in \mathbb{Z}$.
D'autre part :

$$ab = (m_1 m_2 + 2n_1 n_2) + \sqrt{2}(n_1 m_2 + m_1 n_2) \in A$$

car $m_1 m_2 + 2n_1 n_2 \in \mathbb{Z}$ et $n_1 m_2 + m_1 n_2 \in \mathbb{Z}$.
Enfin, $1 = 1 + 0 \times \sqrt{2} \in A$, donc A est un sous-annneau de $\mathbb{R}$. Comme P est clairement inclus dans A, et comme B est le plus petit (au sens de l'inclusion) sous-anneau de $\mathbb{R}$ contenant P, on a $B \subset A$.
Ainsi, on a l'égalité cherchée.

Il faut vérifier que le neutre pour la multiplication est bien dans A, puisqu'on ne peut pas le déduire des propriétés de stabilité.

2. Cette question a pour objectif de caractériser les éléments de U.

Soit $a = m_1 + n_1\sqrt{2} \in A$ et $b = m_2 + n_2\sqrt{2} \in A$.
On a $ab = (m_1m_2 + 2n_1n_2) + \sqrt{2}(n_1m_2 + m_1n_2)$, ce qui entraîne :

$$\begin{aligned} N(ab) &= \left|(m_1m_2 + 2n_1n_2)^2 - 2(n_1m_2 + m_1n_2)^2\right| \\ &= \left|m_1^2m_2^2 + 4n_1^2n_2^2 - 2n_1^2m_2^2 - 2m_1^2n_2^2\right| \end{aligned}$$

Ce calcul n'a pas beaucoup d'intérêt si on s'arrête là. Soyons optimiste : calculons $N(a)N(b)$ en espérant découvrir quelque chose.

Par ailleurs :

$$\begin{aligned} N(a)N(b) &= \left|(m_1^2 - 2n_1^2)(m_2^2 - 2n_2^2)\right| \\ &= \left|m_1^2m_2^2 + 4n_1^2n_2^2 - 2n_1^2m_2^2 - 2m_1^2n_2^2\right| \\ &= N(ab). \end{aligned}$$

Le sens facile est celui où l'on suppose $z \in U$, puisqu'on peut alors utiliser son inverse ; l'autre implication nécessite de prouver l'existence de cet inverse, ce qui est *a priori* plus difficile.

Supposons $z \in U$. Il existe donc $z' \in U$ tel que $zz' = 1$. D'après ce qu'on vient d'obtenir, on en déduit que $N(z)N(z') = N(1) = 1$. Comme $N(z)$ et $N(z')$ appartiennent à $\mathbb{N}^*$, on conclut que $N(z) = 1$.

Passons à la réciproque : pour $z \in A$ tel que $N(z) = 1$, on cherche $z' \in A$ tel que $zz' = 1$.

Réciproquement, considérons $z = m + n\sqrt{2} \in A$ avec $N(z) = 1$.
Remarquons d'abord que : $(m + n\sqrt{2})(m - n\sqrt{2}) = m^2 - 2n^2$.
Comme $N(z) = \left|m^2 - 2n^2\right| = 1$, z est inversible : selon que $m^2 - 2n^2$ est égal à 1 ou -1, son inverse est $m - n\sqrt{2}$ ou $-m + n\sqrt{2}$.
z appartient donc bien à U.

On remarque l'analogie des formules, propriétés et démonstrations avec les calculs dans $\mathbb{C}$ utilisant le module.

3. Pour avoir l'existence et l'unicité de n, on se ramène à un encadrement de définition de partie entière.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $(1+\sqrt{2})^n \leqslant z < (1+\sqrt{2})^{n+1}$ si et seulement si

$$n \ln(1+\sqrt{2}) \leqslant \ln(z) < (n+1)\ln(1+\sqrt{2})$$

par stricte croissante de $\ln$, $\ln(z)$ étant bien défini puisque $z \geqslant x \geqslant 1$. Comme $\ln(1+\sqrt{2}) > 0$, ceci équivaut à

$$n \leqslant \frac{\ln(z)}{\ln(1+\sqrt{2})} < n+1$$

donc n existe et est unique par définition de la partie entière.

Pour la seconde partie de la question, on commence par montrer que $z(1+\sqrt{2})^{-n}$ est de la forme cherchée avec x' et y' dans $\mathbb{Z}$. Ceci vient de l'inversibilité de $(1+\sqrt{2})^n$. On manipule ensuite les inégalités pour avoir x' et $y' \geqslant 0$.

Comme $N((1+\sqrt{2})^n) = N(1+\sqrt{2})^n = 1$, $(1+\sqrt{2})^n$ est un élément inversible de A. On peut donc poser :

$$\frac{x+y\sqrt{2}}{(1+\sqrt{2})^n} = x' + y'\sqrt{2} \text{ avec } x' \in \mathbb{Z} \text{ et } y' \in \mathbb{Z}$$

et on a :

$$N(x'+y'\sqrt{2}) = 1 = \left|x'^2 - 2y'^2\right| = \left|x'+y'\sqrt{2}\right| \times \left|x'-y'\sqrt{2}\right|$$

On a nécessairement $x' \neq 0$ (sinon $2(y')^2 = 1$ mais 1 est impair).
Supposons $y' \neq 0$; x' et y' sont alors de même signe. En effet, supposons-les de signe distinct, par exemple $x' \geqslant 0$ et $y' \leqslant 0$ pour fixer les idées. Comme $x' \neq 0$, $x' \geqslant 1$. Alors on a :

$$1 \leqslant x' + y'\sqrt{2} < x' - y'\sqrt{2}$$

qui entraîne $\left|x'^2 - 2y'^2\right| > 1$... absurde !
Par suite x' et y' sont positifs, quitte à changer x' et y' en leurs opposés.

4. On doit montrer deux inclusions pour cette égalité d'ensembles. L'inclusion simple est celle qui consiste à *vérifier* que tout nombre élément de A de la forme $\pm(1+\sqrt{2})^n$ est inversible, ce qui est facile en utilisant N (qui est un morphisme de groupes par le 2).

Si $z = \pm(1+\sqrt{2})^n$ avec $n \in \mathbb{Z}$, on a $N(z) = \left[N(1+\sqrt{2})\right]^n = 1$; z appartient donc à U.

Pour la réciproque, on utilise la question précédente.

Réciproquement, soit $z = x + y\sqrt{2} \in U$, ce qui est équivalent à $\left|x^2 - 2y^2\right| = 1$. Les éléments $\pm x \pm y\sqrt{2}$ vérifient cette équation, et sont aussi inversibles. On peut donc suppposer $x > 0$ et $y \geqslant 0$.
Notons n, x' et y' les entiers donnés par la question précédente. On a alors

$$1 \leqslant \frac{x+y\sqrt{2}}{(1+\sqrt{2})^n} = x' + y'\sqrt{2} < 1 + \sqrt{2}.$$

On a donc $y' = 0$ et $x' = 1$ et on obtient : $z = x + y\sqrt{2} = (1+\sqrt{2})^n$.
Les autres cas possibles sur z donnent $-(1+\sqrt{2})^n$, ou $x - y\sqrt{2} = \pm(1+\sqrt{2})^{-n}$.
z est donc toujours de la forme annoncée.

Exercice 1.6 : Groupe multiplicatif d'un corps fini

Soit G un groupe fini de neutre e. On note m le ppcm des ordres des éléments de G et $m = p_1^{\alpha_1} \cdots p_d^{\alpha_d}$ sa décomposition en facteurs premiers.
1. Montrer que pour i entre 1 et d, G admet un élément d'ordre $p_i^{\alpha_i}$ (on pourra commencer par chercher un élément dont l'ordre est divisible par $p_i^{\alpha_i}$).
2. Montrer que G admet un élément d'ordre m.
3. Soit $\mathbb{K}$ un corps fini, montrer que $(\mathbb{K}^*, \times)$ est cyclique. On admettra que tout polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$ a moins de racines que son degré, et on pourra considérer le polynôme $X^m - 1$.

1. En suivant l'indication, il faut commencer par trouver un élément dans G dont l'ordre est divisible par $p_i^{\alpha_i}$. Pour ce faire, on raisonne par l'absurde : si aucun élément dans G n'a d'ordre divisant $p_i^{\alpha_i}$ alors on va réussir à trouver un multiple commun plus petit que m.

Soit $i \in \{1, \ldots, d\}$. Supposons que l'ordre de tout élément de G ne soit pas divisible par $p_i^{\alpha_i}$. Si $x \in G$, l'ordre n de x divise m, donc a une décomposition en facteurs premiers de la forme $p_1^{\beta_1} \cdots p_d^{\beta_d}$, avec, pour k entre 1 et d, $\beta_k \leqslant \alpha_k$. Comme x n'est pas divisible par $p_i^{\alpha_i}$, $\beta_i \leqslant \alpha_i - 1$. Ainsi n divise l'entier

$$q = p_1^{\alpha_1} \cdots p_{i-1}^{\alpha_{i-1}} p_i^{\alpha_i - 1} p_{i+1}^{\alpha_{i+1}} \cdots p_d^{\alpha_d}.$$

Ceci vaut pour tout x dans G, donc les ordres de tous les éléments de G divisent $q < m$... absurde, puisque m est le ppcm de ces ordres ! Ainsi on a $x \in G$ tel que $p_i^{\alpha_i}$ divise n, l'ordre de x.

Dans un deuxième temps, on va utiliser x pour construire un élément d'ordre $p_i^{\alpha_i}$. Comme $p_i^{\alpha_i}$ divise n, on a $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = p_i^{\alpha_i} k$. On a alors

$$e = x^n = x^{p_i^{\alpha_i} k} = (x^k)^{p_i^{\alpha_i}},$$

ce qui encourage à regarder x^k.

Notons $k = n\, p_i^{-\alpha_i}$ et posons $y = x^k$. Alors $y^{p_i^{\alpha_i}} = x^{k p_i^{\alpha_i}} = x^n = e$. Pour $l < p_i^{\alpha_i} - 1$, on a $kl < n - 1$, donc $x^{k\,l} \neq e$ i.e. $y^l \neq e$. Ainsi $p_i^{\alpha_i}$ est l'ordre de y dans G.

Il ne faut pas oublier que pour prouver que y est d'ordre d, il faut montrer que $y^d = e$ et $y^l \neq e$ pour tout l entre 1 et $d - 1$.

2. Notons x_i un élément de G d'ordre $p_i^{\alpha_i}$. Comme les $p_i^{\alpha_i}$ sont deux à deux premiers entre eux, pour avoir un élément d'ordre m, on regarde le produit des x_i. Pour démontrer que ce x est d'ordre m, la méthode reste la même : il faut montrer que $x^m = e$ et que pour tous les $k < m-1$, $x^k \neq e$.

Pour tout i entre 1 et d, on a x_i un élément d'ordre $p_i^{\alpha_i}$ dans G d'après la question précédente. Posons $x = x_1 \dots x_d$. Pour $i \in \{1, \dots, d\}$, notons alors $m_i = n\, p_i^{-\alpha_i}$, alors (comme G est abélien)

$$x^m = \prod_{i=1}^{d} x_i^m = \prod_{i=1}^{d} (x_i^{p_i^{\alpha_i}})^{m_i} = \prod_{i=1}^{d} e^{m_i} = e.$$

Si $k < m-1$, on a i entre 1 et d tel que k ne soit pas divisible par $p_i^{\alpha_i}$. Alors k divise $q = p_1^{\alpha_1} \dots p_{i-1}^{\alpha_{i-1}} p_i^{\alpha_i - 1} p_{i+1}^{\alpha_{i+1}} \dots p_d^{\alpha_d}$.
Pour $j \neq i$, on a comme plus haut $x_j^q = e$, mais $x_i^q \neq e$, sinon q serait divisible par $p_i^{\alpha_i}$ (qui est l'ordre de x_i). On a donc $x^q = x_i^q \neq e$. Comme k divise q, si $x^k = e$, $x^q = (x^k)^{\frac{q}{k}} = e$. Ainsi $x^k \neq e$ et x est d'ordre m

3. Pour montrer que $\mathbb{K}^*$ est cyclique, il faut montrer que $\mathbb{K}^*$ a un élément d'ordre $n-1$ (si n est le cardinal de $\mathbb{K}$). Comme $\mathbb{K}^*$ est un groupe abélien pour la multiplication, on considère le ppcm des ordres des éléments de $\mathbb{K}^*$ d'après la question précédente. En termes de polynômes, tous les éléments de $\mathbb{K}^*$ vont donc être racines de $X^m - 1$. On utilise donc le lien entre nombres de racines et degré (donné en indication).

Soit m le ppcm des ordres des éléments de $\mathbb{K}^*$. Comme tout élément de $\mathbb{K}^*$ est d'ordre divisant $n-1$ (par le théorème de Lagrange), m divise $n-1$. On a donc $m \leqslant n-1$.
D'autre part, le polynôme $X^m - 1$ a pour racines tous les éléments de $\mathbb{K}^*$ (puisque tout élément de $\mathbb{K}^*$ a un ordre divisant m). Il a donc $n-1$ racines, donc $n-1$ est plus petit que m, le degré de ce polynôme.
Ainsi $m = n-1$, et comme $\mathbb{K}^*$ a un élément d'ordre m d'après la question précédente, il est cyclique.

Exercice 1.7 : Radical d'un idéal

Soit A un anneau commutatif et I un idéal de A. On appelle radical de I, et on note $\sqrt{I}$, l'ensemble des $x \in A$ pour lesquels il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x^n \in I$.
1. Démontrer que $\sqrt{I}$ est un idéal de A.
2. Démontrer que $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$.
3. Si I et J sont deux idéaux de A, démontrer que :

$$\sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J} \text{ et } \sqrt{I+J} \supset \sqrt{I} + \sqrt{J}.$$

4. Dans $\mathbb{Z}$, trouver $\sqrt{3\,648\,\mathbb{Z}}$.

Rappelons la définition d'un idéal I d'un anneau commutatif A :

– pour l'addition, c'est un sous-groupe ;
– pour la multiplication, pour tous $x \in I$ et $a \in A$, on a $xa \in I$.

1. On commence par vérifier que $\sqrt{I}$ est un sous-groupe de A pour l'addition.

$\sqrt{I} \neq \varnothing$, puisqu'il contient 0_A. Considérons deux éléments quelconques x et y de $\sqrt{I}$, et montrons que $x - y \in \sqrt{I}$. Il existe alors des entiers m et n tels que $x^n \in I$ et $y^m \in I$.
Dans l'anneau commutatif A, nous pouvons utiliser la formule du binôme :

$$(x-y)^{n+m} = \sum_{k=0}^{n+m} (-1)^{n+m-k} \binom{n+m}{k} x^k y^{n+m-k}.$$

Nous allons prouver que cette somme appartient à I en prouvant que tous les termes sont dans I car I est stable pour l'addition.

Il faut faire attention à ne pas introduire une puissance négative car x et y ne sont pas supposés inversibles.

- D'une part, pour $0 \leqslant k \leqslant n$, on a $x^k y^{n+m-k} = y^m(x^k y^{n-k}) \in I$, car $y^m \in I$.
- D'autre part, si $n \leqslant k \leqslant n+m$, on a $x^k y^{n+m-k} = x^n(x^{k-n} y^{n+m-k}) \in I$, car $x^n \in I$.

Comme I est un sous-groupe pour l'addition, la somme de termes qui appartiennent tous à I appartient aussi à I. On a donc $(x-y)^{n+m} \in I$, ce qui démontre que $x - y \in \sqrt{I}$.

On vérifie ensuite la propriété du produit, qui est assez simple.

Soit $x \in \sqrt{I}$ et $a \in A$; alors $(xa)^n = x^n a^n$ car l'anneau est commutatif.
Comme $x^n \in I$, on a $(xa)^n \in I$ ce qui signifie que $xa \in \sqrt{I}$.
En conclusion, $\sqrt{I}$ est un idéal de A.

2. On doit montrer une égalité d'ensembles, il faut donc faire les deux inclusions. On commence par remarquer que l'une des inclusions est bien plus générale.

D'une façon générale, si I et J sont deux idéaux de A tels que $I \subset J$, alors $\sqrt{I} \subset \sqrt{J}$. En effet, si $x \in \sqrt{I}$, il existe un entier n tel que $x^n \in I$, donc $x^n \in J$ si $I \subset J$. Comme $I \subset \sqrt{I}$, on en déduit donc que $\sqrt{I} \subset \sqrt{\sqrt{I}}$.

L'autre inclusion s'obtient en utilisant directement la définition du radical.

Réciproquement, soit $x \in \sqrt{\sqrt{I}}$. Il existe alors un entier p tel que $x^p \in \sqrt{I}$. Dans ce cas, il existe aussi un entier n tel que $(x^p)^n \in I$. On a donc $x^{np} \in I$, soit $x \in I$.
En conclusion, ces deux inclusions montrent que $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$.

3. On procède de même, en réutilisant la remarque sur les inclusions de radicaux.

- De $I \cap J \subset I$ et $I \cap J \subset J$, on déduit que $\sqrt{I \cap J} \subset \sqrt{I}$ et $\sqrt{I \cap J} \subset \sqrt{J}$, d'où $\sqrt{I \cap J} \subset \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$.
- Soit $x \in \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$. Il existe donc deux entiers m et n tels que $x^m \in I$ et $x^n \in J$. D'après la définition d'un idéal, on en déduit que $x^m x^n$ appartient à I et à J. On a alors $x^{m+n} \in I \cap J$. x est donc un élément de $\sqrt{I \cap J}$, ce qui démontre :
$$\sqrt{I} \cap \sqrt{J} \subset \sqrt{I \cap J}.$$

Des deux inclusions précédentes on tire $\sqrt{I} \cap \sqrt{J} = \sqrt{I \cap J}$.

La dernière inclusion s'obtient en appliquant le radical aux inclusions que l'on connait : $I \subset I + J$ et $J \subset I + J$.

On a $I \subset I + J$ et $J \subset I + J$ car les sous-groupes additifs I et J contiennent 0. Par conséquent : $\sqrt{I} \subset \sqrt{I + J}$ et $\sqrt{J} \subset \sqrt{I + J}$, puis $\sqrt{I} + \sqrt{J} \subset \sqrt{I + J}$ puisque $\sqrt{I + J}$ est un idéal, donc stable pour l'addition.

4. Nous allons introduire la décomposition en facteurs premiers de $3\,648$: en effet, pour qu'il existe une puissance de x divisble par $3\,648$, il faut et il suffit que x soit divisible par les facteurs premiers de $3\,648$.

Dans $\mathbb{Z}$, $\sqrt{3\,648\ \mathbb{Z}}$ est constitué par les $x \in \mathbb{Z}$ tels qu'il existe une puissance x^n qui soit multiple de $3\,648$.
La décomposition de $3\,648$ en facteurs premiers est : $3\,648 = 2^6 \times 3 \times 19$.
Pour qu'une puissance de x soit divisible par ces facteurs, il faut, et il suffit que x soit divisible par $2 \times 3 \times 19 = 114$.
On a donc : $\sqrt{3\,648\ \mathbb{Z}} = 114\ \mathbb{Z}$.

Exercice 1.8 : Une congruence

Pour n entier naturel écrit en base dix, on désigne par $f(n)$ la somme des chiffres de n. Calculer $f \circ f \circ f(N)$ avec $N = 2011^{2012}$.

10 est congru à 1 modulo 9, et il en est de même de toutes ses puissances. Il s'agit donc d'un calcul dans $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$, suivi d'un encadrement pour obtenir un résultat unique.

Si l'écriture de n en base dix est : $n = \overline{a_k \dots a_1 a_0}$, cela signifie que :

$$n = a_0 + a_1 \times 10 + \cdots + a_k \times 10^k.$$

Si l'on se place dans $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$, on peut écrire l'égalité des classes :

$$\overline{n} = \overline{a_0} + \overline{a_1} \times \overline{10} + \cdots + \overline{a_k} \times \overline{10}^k = \overline{a_0 + a_1 + \cdots + a_k} = \overline{f(n)}$$

puisque $\overline{10} = \overline{1}$.
Nous allons déterminer $\overline{N}$ dans $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$.
Tout d'abord : $\overline{2011} = \overline{2+1+1} = \overline{4}$.
Écrivons maintenant les puissances successives de $\overline{4}$ jusqu'à l'obtention de $\overline{1}$ pour trouver l'ordre de $\overline{4}$.

$$(\overline{4})^2 = \overline{4^2} = \overline{16} = \overline{7}$$
$$(\overline{4})^3 = \overline{4^2} \times \overline{4} = \overline{7} \times \overline{4} = \overline{7 \times 4} = \overline{28} = \overline{1}.$$

Écrivons l'égalité de division euclidienne de l'exposant de N par l'ordre de $\overline{4}$:

$$2012 = 3 \times 670 + 2.$$

On a donc :

$$\begin{aligned}\overline{N} &= \overline{2011}^{2012} = \overline{4}^{3\times 670+2} = \left(\overline{4}^3\right)^{670} \times \overline{4}^2 = \overline{4}^2 \\ &= \overline{7}.\end{aligned}$$

Si N est congru à 7 modulo 9, il en est de même de $f(N)$, de $f \circ f(N)$ et de $f \circ f \circ f(N)$. Ces nombres sont donc du type $7 + 9k$ avec $k \in \mathbb{N}$. Nous allons les localiser de sorte qu'il ne reste qu'une seule valeur de k pour $f \circ f \circ f(N)$.

À elle seule, une congruence ne peut se transformer en égalité ; il faut un encadrement plus précis.

En majorant grossièrement, on a : $2011^{2012} < 10\,000^{2500} = 10^{10\,000}$.
N a donc moins de $10\,000$ chiffres, et on a : $f(N) < 9 \times 10\,000$.
Le nombre inférieur à $90\,000$ dont la somme des chiffres est la plus grande est $89\,999$; par conséquent : $f \circ f(N) < 44$.
Le nombre inférieur à 44 dont la somme des chiffres est la plus grande est 39 ; par conséquent : $f \circ f \circ f(N) < 12$.
Un seul entier du type $7 + 9k$ avec $k \in \mathbb{N}$ vérifie cette majoration, l'entier 7, obtenu pour $k = 0$. On a donc $f \circ f \circ f(N) = 7$.

Avec un logiciel de calcul, on obtient successivement : $f(N) = 29\,950$.
On en déduit : $f \circ f(N) = 25$ et enfin $f \circ f \circ f(N) = 7$.

Exercice 1.9 : Systèmes de congruences

1. Résoudre dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ l'équation : $\overline{3}x + \overline{2} = -\overline{1}$.
2. Résoudre le système de congruence suivant

$$\begin{cases} 3x + 2 \equiv -1 \ [5] \\ 3x - 1 \equiv 3 \ [7] \end{cases}$$

3. Résoudre le système de congruence suivant

$$\begin{cases} 5x + 2y \equiv 3 \ [6] \\ 2x + 4y \equiv 1 \ [5] \end{cases}$$

Dans un anneau, si vous voulez diviser par un élément, il s'agit en fait de multiplier par son inverse, s'il existe.
Dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, un élément $\overline{p}$ est inversible si, et seulement si, n et p sont premiers entre eux.

1. La rédaction de l'énoncé conduit à chercher x comme élément de $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.

Comme 5 est un nombre premier, $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ est un corps, donc tout élément non nul est inversible.
Diviser par $\overline{3}$, c'est multiplier par son inverse qui est égal à $\overline{2}$ puisque $\overline{3} \times \overline{2} = \overline{1}$.
L'équation est donc équivalente à :

$$x + \overline{4} = \overline{-2} = \overline{3}$$

d'où : $x = \overline{3} - \overline{4} = \overline{-1} = \overline{4}$.

2. La question précédente montre que la première équation équivaut à $x \equiv 4 \ [5]$. On résout la séconde équation comme dans la question précédente, en travaillant cette fois dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$.

Comme 7 est un nombre premier, $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ est un corps, donc tout élément non nul est inversible. Diviser par $\overline{3}$, c'est multiplier par son inverse qui est égal à $\overline{5}$ puisque $\overline{3} \times \overline{5} = \overline{1}$.
L'équation est donc équivalente à :

$$\overline{3}x = \overline{4} \qquad \text{i.e.} \qquad x = \overline{20} = \overline{6}$$

Au final le système à résoudre équivaut à

$$\begin{cases} x \equiv 4 \ [5] \\ x \equiv 6 \ [7] \end{cases}$$

Lorsqu'on a à résoudre un système de la forme $\begin{cases} x \equiv a \ [m] \\ x \equiv b \ [n] \end{cases}$ avec $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$, m et n deux entiers premiers entre eux, on sait d'après le théorème des restes chinois qu'il existe au moins une solution $x \in \mathbb{Z}$, unique modulo mn.

Si l'on trouve une solution particulière x_0, les solutions sont donc les $x_0 + kmn$, $k \in \mathbb{Z}$. Pour trouver une solution particulière x_0, on part d'une relation de Bezout $mu + nv = 1$ (avec $(u, v) \in \mathbb{Z}$). On a alors $c = mu$ qui vérifie $c \equiv 0 \ [m]$ et $c \equiv 1 \ [n]$, pendant que $d = nv$ vérifie $d \equiv 1 \ [m]$ et $d \equiv 0 \ [n]$. Ainsi $x_0 = ad + bc$ est une solution particulière.
Dans notre cas particulier, on commence par trouver une relation de Bezout entre 5 et 7 (à tâtons ou en appliquant l'algorithme d'Euclide étendu) puis on trouve une solution particulière avec la méthode ci-dessus.

Comme 5 et 7 sont premiers entre eux, le système admet au moins une solution $x \in \mathbb{Z}$, unique modulo 35, par le théorème des restes chinois.
$3 \times 5 - 2 \times 7 = 1$ est une relation de Bezout évidente entre 5 et 7 donc $c = 15$ vérifie $c \equiv 1 \ [7]$ et $c \equiv 0 \ [5]$, $d = -14$ vérifie $d \equiv 0 \ [7]$ et $d \equiv 1 \ [5]$. Par suite $x_0 = 4d + 6c = -56 + 90 = 34$ est solution du système.
Les solutions du système sont les $34 + 35k$, $k \in \mathbb{Z}$.

3. Les deux conditions conduisent à des calculs simultanés dans des anneaux différents. Il est préférable de chercher les entiers x et y plutôt que leurs classes.

Dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, la première équation peut s'écrire : $\overline{5}\,\overline{x} + \overline{2}\,\overline{y} = \overline{3}$. En multipliant par $\overline{5}$, cette équation devient :

$$\overline{x} + \overline{4}\,\overline{y} = \overline{3}$$

soit

$$\overline{x} = \overline{2}\,\overline{y} + \overline{3}$$

ou encore : $x = 2y + 3 + 6k$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
Reportons cette expression dans la seconde équation :

$$3y + 2k \equiv 0 \quad [5]$$

puis $y \equiv k \quad [5]$ en effectuant des calculs dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. On obtient donc (en reportant la valeur de y dans l'expression qui donne x) :

$$x = 3 + 8k + 10k'$$
$$y = k + 5k'$$

avec $k \in \mathbb{Z}$ et $k' \in \mathbb{Z}$.

Exercice 1.10 : Application du théorème chinois

Soit p et q deux entiers. Montrer que le groupe produit $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ est cyclique si et seulement si p et q sont premiers entre eux.

Aucune loi n'est précisée dans l'énoncé, mais $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/pq\mathbb{Z}$ ne sont des groupes que pour la loi $+$.

Pour démontrer une équivalence, il faut montrer les deux implications. Si p et q sont premiers entre eux, on pense au théorème chinois.

L'appelation « théorème chinois » vient du fait que les chinois de la Haute Antiquité utilisaient ce résultat en astronomie : étant donnés deux astres dont les durées de révolution et les positions sont connues, le temps qu'ils mettront à retrouver la même position s'obtient en utilisant ce lemme.

Supposons p et q premiers entre eux. D'après le théorème chinois, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ est isomorphe (en tant qu'anneau, donc en tant que groupe pour la loi $+$) à $\mathbb{Z}/pq\mathbb{Z}$. Notons $\varphi : \mathbb{Z}/pq\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ un tel isomorphisme. Pour $(a, b) \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$, on a un unique $x \in \mathbb{Z}/pq\mathbb{Z}$ tel que $\varphi(x) = (a, b)$. Notons n un représentant de x, alors

$$(a, b) = \varphi(x) = \varphi(n\overline{1}) = n\varphi(\overline{1})$$

et $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ est cyclique, engendré par $\varphi(\overline{1})$.

Pour démontrer l'autre implication, il est préférable de démontrer sa contraposée ; c'est-à-dire que, si p et q ne sont pas premiers entre eux, alors $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$, n'est pas cyclique.

Supposons que p et q ne sont pas premiers entre eux. Notons $d > 1$ leur pgcd et m leur ppcm. Puisque $|pq| = md$, on a alors $m < pq$.
Pour tout couple (x, y) de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$, on a $m(x, y) = (mx, my) = (0, 0)$ puisque p divise mx et q divise my.
Le sous-groupe engendré par (x, y) a un cardinal inférieur ou égal m. Comme $m < pq$, il ne peut pas être égal à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$, qui n'est donc pas cyclique.

Ceci montre en particulier que le théorème chinois est faux si p et q ne sont pas premiers entre eux : $\mathbb{Z}/pq\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ ne peuvent être isomorphes en tant que groupes puisque l'un est cyclique, mais l'autre non.

Exercice 1.11 : Nombres de Fermat

1. Montrer que si $2^a + 1$ est premier, alors a est une puissance de 2.
2. Pour tout entier n, on note $F_n = 2^{2^n} + 1$. Montrer que, si m et n sont distincts, alors F_n et F_m sont premiers entre eux.

1. Il s'agit de démontrer une implication. Les tentatives pour la montrer directement n'aboutissent pas, nous allons donc démontrer la contraposée, c'est-à-dire que, si a n'est pas une puissance de 2, alors 2^a+1 n'est pas premier. Si a n'est pas une puissance de 2, on peut écrire $a = p2^k$ avec p impair et $p > 1$. Pour montrer qu'il existe un diviseur non trivial de 2^a+1 (autre que 1 et lui-même), on va utiliser une congruence. Mais commençons par une congruence relative à 2^{2^k} avant d'arriver à 2^a.

De $2^{2^k} \equiv -1 \ \left[2^{2^k} + 1\right]$, on déduit $2^{p2^k} \equiv (-1)^p \equiv -1 \ \left[2^{2^k} + 1\right]$, soit :

$$2^a + 1 \equiv 0 \ \left[2^{2^k} + 1\right]$$

ce qui assure que $2^a + 1$ n'est pas premier.

Il ne faut pas oublier que les congruences sont des outils très utiles pour montrer des relations de divisibilité.

Fermat (1601-1665) était persuadé que la réciproque était vraie, ce qui aurait fourni des nombres premiers à volonté. Mais Euler (1707-1783) a donné le premier contre-exemple : $2^{32} + 1 = 4\,294\,967\,297$ est divisible par 641. Les nombres $F_k = 2^{2^k} + 1$ sont appelés nombres de Fermat. Actuellement, on sait que F_0, F_1, F_2, F_3, F_4 sont premiers, et que $F_5, \ldots, F_{32}$ ne sont pas premiers. On ne sait pas pour $n = 33$.

2. On réduit le plus grand des deux modulo le plus petit, afin d'exploiter la propriété précédente.

Supposons $m > n$. On a :

$$F_m = (2^{2^n})^{2^{m-n}} + 1 \equiv (-1)^{2^{m-n}} + 1 \equiv 2 \ \ [F_n]\,.$$

Donc si d divise F_n et F_m alors d divise 2. F_n étant impair on en déduit $d = 1$, c'est-à-dire que F_n et F_m sont premiers entre eux.

Chaque F_n ayant un diviseur premier, on en déduit qu'il y a une infinité de nombres premiers, et même de la forme $4k+1$ car, si p premier divise F_n, alors :

$$\begin{aligned}(-1)^{\frac{p-1}{2}} &\equiv \left(2^{2^{n-1}}\right)^{p-1} \quad [p] \\ &\equiv 1 \ \ [p] \ \text{ en utilisant le théorème de Fermat.}\end{aligned}$$

Par suite : $p = 4k+1$.

Exercice 1.12 : Codage RSA

On se donne p et q deux nombres premiers distincts.
1. Justifier que pour $a \in \mathbb{Z}$ non divisible par p et q, $a^{(p-1)\,(q-1)} \equiv 1 \ \ [pq]$.
2. Soit $d \in \{1, \dots, (p-1)(q-1)\}$, premier avec $(p-1)\,(q-1)$. Justifier l'existence de $e \in \{1, \dots (p-1)\,(q-1)\}$ tel que $e\,d \equiv 1 \ \ [(p-1)\,(q-1)]$.
3. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{Z}$, $a^{d\,e} \equiv a \ \ [p\,q]$.

1. Il faut tout simplement appliquer le théorème d'Euler : comme p et q sont premiers et distincts, $(p-1)\,(q-1) = \varphi(p\,q)$.

Notons φ l'indicatrice d'Euler. Comme p et q sont deux nombres premiers distincts (donc premiers entre eux), on a $\varphi(p\,q) = \varphi(p)\,\varphi(q) = (p-1)\,(q-1)$.
Soit $a \in \mathbb{Z}$ non divisible par p et q. Alors a est premier avec p et avec q, donc avec $p\,q$. Ainsi, par le théorème d'Euler, $a^{(p-1)\,(q-1)} \equiv 1 \ \ [p\,q]$.

2. Il s'agit de trouver l'inverse modulo $(p-1)\,(q-1)$. On se place donc dans l'anneau $\mathbb{Z}/(p-1)\,(q-1)\mathbb{Z}$.

Soit $d \in \{1, \dots, (p-1)\,(q-1)\}$, premier avec $(p-1)\,(q-1)$. Alors la classe $\overline{d}$ de d modulo $(p-1)\,(q-1)$ est inversible dans $\mathbb{Z}/(p-1)\,(q-1)\mathbb{Z}$. On a donc $x \in \mathbb{Z}/(p-1)\,(q-1)\mathbb{Z}$ tel que $\overline{d}x = \overline{1}$.
Soit e le représentant de x compris entre 1 et $(p-1)\,(q-1)$, alors on a la relation $de \equiv 1 \ \ [(p-1)\,(q-1)]$.

Il faut bien faire la distinction entre la classe d'équivalence d'un objet modulo d et ses représentants.

3. On doit distinguer les cas a multiple de p ou de q, ou non, pour pouvoir (dans le deuxième cas) utiliser la question 1.

Si a n'est ni multiple de p, ni multiple de q, $a^{(p-1)\,(q-1)} \equiv 1 \ \ [p\,q]$. Comme $d\,e \equiv 1 \ \ [(p-1)\,(q-1)]$, on a $k \in \mathbb{Z}$ tel que $d\,e = 1 + (p-1)\,(q-1)\,k$. Par suite,

$$a^{d\,e} = a^{1+(p-1)\,(q-1)\,k} = a \times (a^{(p-1)\,(q-1)})^k \equiv a \times 1^k \equiv a \ \ [p\,q]\,.$$

Supposons maintenant a multiple de p ou de q. Si a est multiple de p et q, alors $p\,q$ divise a, donc $a^{d\,e}$. Alors $a^{d\,e}$ et a sont tous deux congrus à 0, donc sont congrus modulo $p\,q$.
Reste à montrer le cas où a est multiple de p mais pas de q (on s'y ramène en échangeant p et q, si nécessaire). Alors $a^{e\,d}$ est divisible par p, donc $a^{e\,d} - a$ également. Par le petit théorème de Fermat, $a^{q-1} \equiv 1 \ \ [q]$, donc

$$a^{(p-1)\,(q-1)} \equiv 1^{p-1} \equiv 1 \ \ [q]\,.$$

Ainsi $a^{e\,d} = a^{1+(p-1)\,(q-1)\,k} \equiv a \ \ [q]$ (comme plus haut).
Par suite $a^{e\,d} - a$ est divisible par q. Il est donc divisible par p et q donc par $p\,q$ (car p et q sont premiers entre eux), puis $a^{e\,d} \equiv a \ \ [p\,q]$.

Ceci est utilisé pour des algorithmes de codage : une personne souhaitant communiquer de manière codée publie l'entier $n = p\,q$ et la clé de codage d, mais est le seul à connaître la clé de décodage e. Son calcul nécessite celui de $(p-1)\,(q-1)$ donc de réussir à trouver les facteurs premiers de n, ce qui est très compliqué, si n est très grand.

Exercice 1.13 : Polynôme et racines n-ièmes

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{Z}$. On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité.
1. Calculer $\displaystyle\sum_{x \in \mathbb{U}_n} x^p$.
2. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré plus petit que $n-1$. On suppose avoir $M > 0$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{U}_n \ , \ |P(x)| \leqslant M.$$

Montrer que les coefficients de P sont bornés par M.

1. Il s'agit d'un simple calcul d'une somme géométrique, il suffit de bien se souvenir de l'énumération classique de $\mathbb{U}_n$.

Lors du calcul d'une somme géométrique, il est indispensable de bien distinguer le cas où la raison vaut 1.

On sait que $\mathbb{U}_n$ est l'ensemble de $\mathrm{e}^{2ik\pi/n}$, k variant entre 0 et $n-1$. Ainsi, si p n'est pas un multiple de n, on a $e^{2ip\pi/n} \neq 1$ et donc :

$$\begin{aligned}\sum_{x\in\mathbb{U}_n} x^p = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\mathrm{e}^{2ik\pi/n}\right)^p = \sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{e}^{2ikp\pi/n} &= \sum_{k=0}^{n-1}\left(\mathrm{e}^{2ip\pi/n}\right)^k \\ = \frac{1-\mathrm{e}^{2ip\pi}}{1-\mathrm{e}^{2ip\pi/n}} = 0 &\end{aligned}$$

Si maintenant p est un multiple de n, on a

$$\sum_{x\in\mathbb{U}_n} x^p = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\mathrm{e}^{2ik\pi/n}\right)^p = \sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{e}^{2ikp\pi/n} = \sum_{k=0}^{n-1} 1 = n.$$

2. Comme P est de degré plus petit que $n-1$, il s'écrit sous la forme $\sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k x^k$. Pour isoler le coefficient de degré k, on pense, avec la question précédente, à regarder la somme de $P(x)x^{-k}$ pour $x \in \mathbb{U}_n$: les puissances autres que k vont s'annuler, et il ne restera que $n\,a_k$.

Comme P est de degré plus petit que $n-1$, on a $(a_0,\ldots,a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ tel que :

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k.$$

Pour $k \in \{0,\ldots,n-1\}$, on a, d'après la question précédente,

$$\sum_{x\in\mathbb{U}_n} P(x)x^{-k} = \sum_{x\in\mathbb{U}_n}\sum_{j=0}^{n-1} a_j x^{j-k} = \sum_{j=0}^{n-1} a_j \sum_{x\in\mathbb{U}_n} x^{j-k} = n a_k$$

puisque pour $j \neq k$, $j-k$ n'est pas un multiple de n.
Ainsi, par l'inégalité triangulaire :

$$|a_k| = \frac{1}{n}\left|\sum_{x\in\mathbb{U}_n} P(x)x^{-k}\right| \leqslant \frac{1}{n}\sum_{x\in\mathbb{U}_n}\left|P(x)x^{-k}\right| \leqslant \frac{1}{n}\sum_{x\in\mathbb{U}_n} M = M.$$

Exercice 1.14 : PGCD de P et P'

Soient $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$ et $P \in \mathbb{K}[X]$.
1. Si P et $Q \in \mathbb{K}[X]$, expliquer pourquoi les pgcd de P et de Q calculés dans $\mathbb{C}[X]$ ou dans $\mathbb{K}[X]$ sont les mêmes.
2. Montrer que P n'a que des racines simples dans $\mathbb{C}$ si et seulement si le pgcd de P et P' dans $\mathbb{K}[X]$ vaut 1.
3. Calculer le pgcd de P et de P' si P est scindé dans $\mathbb{K}$.

1. Pour calculer le pgcd de deux polynômes, il faut appliquer l'algorithme d'Euclide. On doit donc expliquer pourquoi l'algorithme d'Euclide donne les mêmes résultats dans $\mathbb{K}[X]$ ou $\mathbb{C}[X]$. Les différentes étapes de l'algorithme sont des divisions euclidiennes, il faut donc montrer que les divisions euclidiennes dans $\mathbb{K}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$ donnent le même résultat.

Si $(A, B) \in \mathbb{K}[X]^2$, et si $B \neq 0$, notons $A = B\,S + R$ la division euclidienne de A par B dans $\mathbb{K}[X]$, avec S et $R \in \mathbb{K}[X]$ et $\deg(R) < \deg(B)$. Alors S et $R \in \mathbb{C}[X]$ (car $\mathbb{K} \subset \mathbb{C}$), donc par unicité de la division euclidienne, c'est également la division euclidienne de A par B dans $\mathbb{C}[X]$.
Les divisions euclidiennes de polynômes de $\mathbb{K}[X]$ donnent le même résultat dans $\mathbb{K}[X]$ ou dans $\mathbb{C}[X]$. Ainsi, en appliquant l'algorithme d'Euclide dans $\mathbb{K}[X]$ ou dans $\mathbb{C}[X]$ à P et Q, on obtiendra les mêmes résultats à chaque étape, donc le même résultat final. Par suite, les pgcd de P et Q dans $\mathbb{K}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$ sont les mêmes.

> Ici utiliser la définition du pgcd ne pouvait aboutir. Il faut utiliser le moyen pratique de calcul du pgcd.

2. Il faut se souvenir de la caractérisation de la multiplicité d'une racine via les dérivées. En particulier, a est racine simple de P si et seulement si $P'(a) \neq 0$ et $P(a) = 0$.

- Supposons que P n'ait que des racines simples dans $\mathbb{C}$. Soit R un diviseur commun à P et P' dans $\mathbb{K}[X]$. Ona donc $(U, V) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que $P = RU$ et $P' = RV$. Si R n'est pas constant, il admet une racine a dans $\mathbb{C}$. Alors $P(a) = R(a)\,U(a) = 0$ et $P'(a) = R(a)\,V(a) = 0$, donc a est racine de P, de multiplicité au moins 2. Absurde ! Ainsi R est constant, et le pgcd de P et P' dans $\mathbb{K}[X]$ vaut 1.
- Supposons maintenant que le pgcd de P et P' dans $\mathbb{K}[X]$ vale 1. Si a est racine de P, on a $(X - a)|P$. Comme $(X - a)$ ne divise pas P' (sinon il diviserait le pgcd de P et P' dans $\mathbb{C}[X]$, qui est le même que celui dans $\mathbb{K}[X]$, donc 1), on a $P'(a) \neq 0$. Ainsi a est racine simple de P.

3. On écrit P sous sa forme de polynôme scindé. On trouve alors facilement les diviseurs communs à P et à P'.

Notons $a_1, \ldots, a_r$ les racines (deux à deux distinctes) de P dans $\mathbb{K}$, de multiplicités respectives $m_1, \ldots, m_r$. Pour i entre 1 et r, $(X - a_i)^{m_i - 1}$ divise P et P' (car a_i est racine de P' de multiplicité $m_i - 1$). Comme les $(X - a_i)^{m_i-1}$

sont deux à deux premiers entre eux, on en déduit que

$$Q = \prod_{i=1}^{r} (X - a_i)^{m_i - 1} \text{ divise } P \text{ et } P'.$$

Réciproquement, soit R un diviseur commun à P et P'. Comme R divise P, il a les mêmes facteurs irréductibles, et R est de la forme

$$\prod_{i=1}^{r} (X - a_i)^{\beta_i} \text{ avec } \beta_i \leqslant m_i$$

pour tout i entre 1 et r. Si $\beta_i = m_i$, alors $(X - a_i)^{m_i}$ divise R, donc P', et a_i est racine de P de multiplicité $m_i + 1$... absurde ! Ainsi $\beta \leqslant m_i - 1$, puis R divise Q. Q est donc le pgcd de P et P'.

On retrouve bien entendu le fait que ce pgcd vaut 1 si les racines sont toutes simples.

Exercice 1.15 : Exemple de polynôme irréductible

Soient $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$ et $a \in \mathbb{K}$. On note P le polynôme $X^p - a$, p étant un nombre premier.
1. Soient Q et $R \in \mathbb{K}[X]$ unitaires non constants tels que $X^p - a = Q\,R$, si $n = \deg(Q)$ et $b = (-1)^n\, Q(0)$, montrer que $b^p = a^n$.
2. En déduire que si P n'a pas de racines dans $\mathbb{K}$, alors P est irréductible dans $\mathbb{K}[X]$.

1. Le fait de poser $b = (-1)^n\, Q(0)$ fait penser aux relations coefficients/racines : b est le produit des racines de Q. Comme les racines de Q sont des racines p-ièmes de a, on obtiendra le résultat. On part alors de la forme factorisée de P pour faire apparaître ces racines.

Notons

$$X^p - a = \prod_{i=1}^{p} (X - r_i)$$

la forme factorisée de $X^p - a$ dans $\mathbb{C}$. Comme Q divise P, Q est de la forme

$$\prod_{j=1}^{n} (X - r_{k_j}),$$

avec $k_1, \ldots, k_n$ entre 1 et p. Par les relations coefficients/racines, on en déduit que $b = r_{k_1} \ldots r_{k_n}$. Comme pour tout $j \in \{1, \ldots, p\}$, r_{k_j} est racine de P,

$r_{k_j}^p = a$. Ainsi

$$b^p = \prod_{j=1}^{n} r_{k_j}^p = \prod_{j=1}^{n} a = a^n.$$

2. La question précédente nous invite à raisonner par l'absurde. Le fait que p soit premier va permettre d'obtenir une relation de Bezout entre p et n, avec laquelle on va réussir à construire un élément de $\mathbb{K}$, qui mis à la puissance p, donne a.

Supposons que P n'admette pas de racines dans $\mathbb{K}$. Si l'on peut écrire $P = Q\,R$ avec Q et R non constants dans $\mathbb{K}[X]$, d'après la question précédente, $b^p = a^n$ avec $b = (-1)^n\, Q(0) \in \mathbb{K}$ et $n = \deg(Q)$.
Or $n < p$, donc n est premier avec p. On a donc $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $p\,u + n\,v = 1$. Notons que $a \neq 0$ (sinon P admet 0 comme racine), donc $b \neq 0$. On a alors

$$(b^v\, a^u)^p = b^{pv}\, a^{pu} = (b^p)^v\, a^{pu} = (a^n)^v\, a^{pu} = a^{nv+pu} = a$$

donc $b^v\, a^u \in \mathbb{K}$ est racine de P... absurde ! Ainsi P est irréductible dans $\mathbb{K}[X]$.

C'est seulement dans ce cas particulier que P n'a pas de racines implique P irréductible. Cet énoncé reste faux dans le cas général, pour des polynômes de degrés supérieurs à 4.

CHAPITRE 2

Réduction

Exercice 2.1 : Éléments propres d'un endomorphisme d'un espace de polynômes

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Pour $P \in \mathbb{K}[X]$ on pose :

$$\Phi(P) = (2X+1)P - (X^2-1)P'.$$

1. Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$.
2. Soit P est un vecteur propre de Φ. Montrer que $P' \neq 0$ et en déduire le degré de P.
3. Déterminer les éléments propres de Φ.

1. Ce genre de question, extrêmement courante au début d'un exercice d'algèbre linéaire, ne présente en général aucune difficulté : il s'agit simplement de vérifier que Φ est linéaire à partir de la définition même de la linéarité.

Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ et $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$. Alors :

$$\Phi(\lambda P + \mu Q) = (2X+1)(\lambda P + \mu Q) - (X^2-1)(\lambda P + \mu Q)'.$$

D'une part, $(2X+1)(\lambda P + \mu Q) = \lambda(2X+1)P + \mu(2X+1)Q$.
D'autre part,

$$(X^2-1)(\lambda P + \mu Q)' = (X^2-1)(\lambda P' + \mu Q') = \lambda (X^2-1)P' + \mu (X^2-1)Q'.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\Phi(\lambda P + \mu Q) &= \lambda (2X+1)P + \mu (2X+1)Q \\ &\qquad - (\lambda (X^2-1)P' + \mu (X^2-1)Q') \\ &= \lambda \Phi(P) + \mu \Phi(Q)\end{aligned}$$

donc Φ est linéaire.

2. La définition d'un vecteur propre P de Φ est : $P \neq 0$ et il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\Phi(P) = \lambda P$. Cette dernière relation s'écrit

$$(2X+1)P - (X^2-1)P' = \lambda P$$

soit encore $(2X+1-\lambda)P = (X^2-1)P'$.
Pour montrer que $P' \neq 0$, on peut raisonner par l'absurde en supposant $P' = 0$.

Soit P un vecteur propre de Φ. Par définition, $P \neq 0$ et il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\Phi(P) = \lambda\, P$.
Si $P' = 0$ la relation $\Phi(P) = \lambda\, P$ se réduit à $(2X+1-\lambda)P = 0$ et donc $P = 0$, ce qui est exclu. Ainsi, $P' \neq 0$.
Soit $n = \deg(P) \in \mathbb{N}$ et notons

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k\, X^k \text{ avec } a_n \neq 0.$$

Comme $P' \neq 0$, P n'est pas constant, donc :

$$n \geqslant 1 \text{ et } P' = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)a_{k+1}\, X^k.$$

Le degré de $(2X+1-\lambda)P$ est $n+1$ et son coefficient dominant est $2\,a_n$.
De même, $(X^2-1)P'$ est de degré $n+1$ et son coefficient dominant est $n\,a_n$.
Vu que ces deux polynômes sont égaux et que $a_n \neq 0$, on a $n = 2$. Ainsi :

$$\text{si } P \in \operatorname{Ker}(\Phi - \lambda \operatorname{Id}) \text{ et } P \neq 0 \text{ alors } \deg(P) = 2.$$

3. Puisque l'on sait que les vecteurs propres de Φ sont de degré 2, on peut les écrire aX^2+bX+c (avec $a \neq 0$) et injecter ceci dans la formule définissant Φ : on obtiendra ainsi un système d'équations vérifié par (a,b,c). Il ne restera plus qu'à résoudre ce système pour trouver les vecteurs propres. Comme λ interviendra, on sera éventuellement amené à distinguer divers cas selon la valeur de ce paramètre.

Soit λ une valeur propre de Φ et P un vecteur propre associé. Alors P est de degré 2 ; notons $P = aX^2+bX+c$ avec $a \neq 0$. On a alors

$$(2X+1-\lambda)P = 2aX^3 + (2b+(1-\lambda)a)X^2 + (2c+(1-\lambda)b)X + (1-\lambda)c$$

et

$$(X^2-1)P' = (X^2-1)(2\,a\,X+b) = 2\,a\,X^3 + b\,X^2 - 2\,a\,X - b.$$

Ainsi, la relation

$$(2X+1-\lambda)P = (X^2-1)P'$$

s'écrit

$$2\,a\,X^3 + (2\,b+(1-\lambda)a)X^2 + (2\,c+(1-\lambda)b)X + (1-\lambda)c = 2\,a\,X^3 + b\,X^2 - 2\,a\,X - b$$

soit, après simplification et regroupement des termes dans le membre de gauche :

$$(b+(1-\lambda)a)X^2 + (2(c+a)+(1-\lambda)b)X + b + (1-\lambda)c = 0.$$

Un polynôme est nul si, et seulement si, tous ses coefficients sont nuls. P est donc vecteur propre si et seulement si on a le système

$$(S) \qquad \begin{cases} (1-\lambda)a + b = 0 \\ (1-\lambda)b + 2(a+c) = 0 \\ (1-\lambda)c + b = 0 \end{cases}$$

La présence du facteur $(1-\lambda)$ dans ces équations suggère d'étudier séparément le cas $\lambda = 1$. En effet, dans ce cas, les équations se simplifient considérablement. Dans le cas $\lambda \neq 1$, nous pourrons au besoin diviser par $1 - \lambda$ pour extraire a, b et c de ces équations.

Que l'on commence ou non par le cas $\lambda = 1$, il ne faut pas oublier de traiter ce cas à part.

Supposons $\lambda = 1$: le système équivaut à $b = 0$ et $c = -a$; on a donc $P = a(X^2 - 1)$. Ainsi, $\mathrm{Ker}(\Phi - \mathrm{Id}) = \mathbb{K}(X^2 - 1)$ qui est de dimension 1.
1 est valeur propre de Φ et le sous-espace propre associé est la droite vectorielle $\mathbb{K}(X^2 - 1)$.

Il reste à traiter le cas $\lambda \neq 1$.

Supposons $\lambda \neq 1$: la première et la troisième équations donnent alors

$$(1-\lambda)a = (1-\lambda)c$$

et donc $a = c$, car $1 - \lambda \neq 0$.
La deuxième équation devient alors $(1-\lambda)b = -4a$ d'où, comme $b = -(1-\lambda)a$: $(1-\lambda)^2 a = 4\,a$. Comme $a \neq 0$, il vient $(1-\lambda)^2 = 4$, soit $1 - \lambda \in \{-2, 2\}$ et enfin $\lambda \in \{-1, 3\}$.

Nous avons donc, pour l'instant, restreint le nombre de cas à étudier : si λ est une valeur propre de Φ et $\lambda \neq 1$, alors λ ne peut valoir que -1 ou 3.
Il reste à voir si ces scalaires sont bien des valeurs propres de Φ et, le cas échéant, déterminer le sous-espace propre associé. Ce sera aisé car le système (S) se simplifie considérablement lorsque l'on assigne à λ une valeur particulière.

Si $\lambda = -1$: le système équivaut à $b = -2\,a$ et $c = a$ donc à $P = a(X-1)^2$. Ainsi, $\mathrm{Ker}(\Phi + \mathrm{Id}) = \mathbb{K}(X-1)^2$; -1 est donc valeur propre de Φ et le sous-espace propre associé est $\mathbb{K}(X-1)^2$.

Il ne reste plus qu'à traiter le cas $\lambda = 3$ de manière tout à fait analogue.

Si $\lambda = 3$: le système équivaut à $b = 2\,a$ et $c = a$ donc à $P = a(X+1)^2$. $\mathrm{Ker}(\Phi - 3\,\mathrm{Id}) = \mathbb{K}(X+1)^2$; 3 est donc valeur propre de Φ et le sous-espace propre associé est $\mathbb{K}(X+1)^2$.
En conclusion, les valeurs propres de Φ sont -1, 1 et 3. De plus :

$$\mathrm{Ker}(\Phi - \mathrm{Id}) = \mathbb{K}(X^2 - 1)$$

$$\mathrm{Ker}(\Phi + \mathrm{Id}) = \mathbb{K}(X-1)^2$$

$$\mathrm{Ker}(\Phi - 3\,\mathrm{Id}) = \mathbb{K}(X+1)^2$$

Exercice 2.2 : Éléments propres d'un endomorphisme d'un espace de fonctions

Soit E l'espace vectoriel des applications continues de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$. Pour $f \in E$ on définit une application $T_f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ par $T_f(0) = f(0)$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \;, T_f(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que, pour tout $f \in E, T_f \in E$.
2. Soit $T\colon E \to E,\ f \mapsto T_f$. Montrer que T est linéaire.
3. Déterminer les éléments propres de T.

1. Soit $f \in E$. La fonction T_f est définie séparément sur $\mathbb{R}_+^*$ et en 0. Nous allons donc vérifier séparément la continuité de T_f sur $\mathbb{R}_+^*$ et en 0. Vu la définition de T_f il est assez naturel de faire apparaître une primitive de f.

Soit F la primitive de f sur $\mathbb{R}_+$ nulle en 0. Alors, pour $x > 0$, $T_f(x) = \dfrac{F(x)}{x}$, donc T_f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ (et même en fait de classe $\mathscr{C}^1$ puisque F l'est). Par ailleurs $F(0) = 0$ donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad T_f(x) = \frac{F(x) - F(0)}{x - 0}.$$

Ainsi, T_f tend vers $F'(0) = f(0)$ quand x tend vers 0, donc T_f est également continue en 0.
En conclusion, T_f est continue sur $\mathbb{R}_+$, donc $T_f \in E$.

2. Nous devons vérifier l'égalité $T(\lambda\, f + \mu\, g) = \lambda\, T(f) + \mu\, T(g)$ pour tous f et $g \in E$ et λ et $\mu \in \mathbb{K}$. Autrement dit il faut vérifier, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, l'égalité

$$T_{\lambda\, f+\mu\, g}(x) = \lambda\, T_f(x) + \mu\, T_g(x).$$

Comme les fonctions de la forme T_h sont définies séparément sur $\mathbb{R}_+^*$ et en 0, nous allons distinguer à nouveau ces deux cas.

Soient $(f, g) \in E^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Alors :

- pour $x > 0$,
$$\begin{aligned} T_{\lambda\, f+\mu\, g}(x) &= \frac{1}{x}\int_0^x (\lambda\, f(t) + \mu\, g(t))\,\mathrm{d}t = \frac{\lambda}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + \frac{\mu}{x}\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \lambda\, T_f(x) + \mu\, T_g(x). \end{aligned}$$
- pour $x = 0$,
$$\begin{aligned} T_{\lambda\, f+\mu\, g}(0) &= (\lambda\, f + \mu\, g)(0) = \lambda\, f(0) + \mu\, g(0) \\ &= \lambda\, T_f(0) + \mu\, T_g(0). \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad T_{\lambda f+\mu g}(x) = \lambda T_f(x) + \mu T_g(x)$$

c'est-à-dire $T_{\lambda f+\mu g} = \lambda T_f + \mu T_g$, soit $T(\lambda f + \mu g) = \lambda T(f) + \mu T(g)$.
T est donc linéaire.

3. La difficulté de la question est que l'on ne connaît pas *a priori* les valeurs propres de T. Nous allons donc chercher simultanément les valeurs propres et les sous-espaces propres associés.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f \in \operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{Id})$. On a donc $T_f = \lambda f$.
Alors $f(0) = \lambda f(0)$ et, pour tout réel $x > 0$, $\dfrac{1}{x} \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \lambda f(x)$.

Encore une fois, il y a deux conditions vérifiées par f. La seconde est une équation intégrale : une relation entre $f(x)$ et une intégrale de f avec une borne dépendant de x, c'est-à-dire une primitive de f. Dériver cette équation par rapport à x permet de se ramener à une équation différentielle vérifiée par f et donc de trouver la forme de la fonction f.

En notant F la primitive de f nulle en 0 on a donc, pour tout réel $x > 0$:

$$F(x) = \lambda x f(x).$$

Comme F est dérivable, on en déduit que f l'est (si $\lambda = 0$, F est constante nulle donc f aussi et est dérivable) donc

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad F'(x) = \lambda x f'(x) + \lambda f(x).$$

Comme $F' = f$ il vient enfin :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \lambda x f'(x) + (\lambda - 1) f(x) = 0.$$

Ceci est une équation différentielle vérifiée par f... si λ n'est pas nul ! En effet, pour nous ramener au cas d'une équation différentielle de la forme $y' + a(x)y = 0$, dont on connaît les solutions, il faut diviser par λx. La division par x ne pose pas de problème puisque l'équation est donnée pour $x > 0$. Il reste à distinguer le cas $\lambda = 0$.

Supposons $\lambda = 0$. Alors la relation précédente se réduit à :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = 0.$$

Par ailleurs, $f(0) = \lambda f(0)$ d'où $f(0) = 0$. La fonction f est donc identiquement nulle.
Ainsi, $\operatorname{Ker}(T) = \{0\}$, ce qui montre que 0 n'est pas valeur propre de T.

Nous pouvons ensuite rapidement résoudre l'équation différentielle dans le cas $\lambda \neq 0$.

Supposons $\lambda \neq 0$. Alors f vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) + \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) \frac{1}{x} f(x) = 0.$$

Ainsi, il existe un réel k tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = k\, x^{\frac{1}{\lambda} - 1}.$$

Maintenant que l'on connaît la forme de f sur $\mathbb{R}_+^*$ nous pouvons étudier le problème en 0. f est continue sur $\mathbb{R}_+$ donc en 0 ; cependant, pour certaines valeurs de λ, l'expression $x^{\frac{1}{\lambda}-1}$ peut diverger quand x tend vers 0 : il faut donc distinguer à nouveau des cas selon le comportement en 0 de cette fonction de x.
On sait que ce comportement dépend du signe de l'exposant de x, ce qui nous donne trois cas à étudier. En soit, l'étude de chaque cas est simple puisqu'il s'agit de problèmes de limites de fonctions usuelles.

Il faut être prudent pour passer du signe de $\dfrac{1}{\lambda}-1$ à une inégalité sur λ : en effet, λ peut très bien être négatif et, dans ce cas, la multiplication par λ change le sens de l'inégalité.

Plus précisément :

- si $\dfrac{1}{\lambda} - 1 < 0$ et $\lambda > 0$ alors $1 - \lambda < 0$ donc $\lambda > 1$;
- si $\dfrac{1}{\lambda} - 1 < 0$ et $\lambda < 0$ alors $1 - \lambda > 0$ donc $\lambda < 1$. Cependant, on a déjà supposé $\lambda < 0$ donc cette nouvelle inégalité n'apporte pas de contrainte supplémentaire.

Ainsi : si $\dfrac{1}{\lambda} - 1 < 0$ alors $\lambda < 0$ ou $\lambda > 1$. Réciproquement, si $\lambda < 0$ ou $\lambda > 1$, on vérifie aisément que $\dfrac{1}{\lambda} - 1 < 0$. De même :

- si $\dfrac{1}{\lambda} - 1 > 0$ et $\lambda > 0$ alors $1 - \lambda > 0$ donc $\lambda < 1$. Comme on a supposé ici $\lambda > 0$ on a donc en fait $0 < \lambda < 1$;
- si $\dfrac{1}{\lambda} - 1 > 0$ et $\lambda < 0$ alors $1 - \lambda < 0$ donc $\lambda > 1$. Ceci est absurde : on ne peut avoir à la fois $\lambda < 0$ et $\lambda > 1$.

Ainsi : si $\dfrac{1}{\lambda} - 1 > 0$ alors $0 < \lambda < 1$. Réciproquement, si $0 < \lambda < 1$, on vérifie facilement que $\dfrac{1}{\lambda} - 1 > 0$.
Enfin, il ne faut pas oublier de traiter le cas $\dfrac{1}{\lambda} - 1 = 0$, c'est-à-dire simplement $\lambda = 1$.

Distinguons trois cas.

- Si $\dfrac{1}{\lambda} - 1 < 0$, c'est-à-dire $\lambda < 0$ ou $\lambda > 1$: alors $x^{\frac{1}{\lambda}-1}$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers 0^+. Comme f est continue en 0, sa limite en 0 est finie, ce qui impose $k = 0$ et donc $f = 0$. Ainsi, $\mathrm{Ker}(T - \lambda\,\mathrm{Id}) = \{0\}$, ce qui montre que λ n'est pas valeur propre de T.
- Si $\dfrac{1}{\lambda} - 1 = 0$, c'est-à-dire $\lambda = 1$: alors $f(x) = k$ pour tout réel $k > 0$ et, f étant continue en 0, il vient $f(0) = k$: la fonction f est donc constante égale à k. Nous avons donc $\mathrm{Ker}(T - \mathrm{Id}) \subset \mathbb{R}$.

Réciproquement, il est clair que toute fonction constante c vérifie $T_c = c$; ainsi, $\mathrm{Ker}(T - \mathrm{Id}) = \mathbb{R}$. 1 est donc bien valeur propre de T et le sous-espace propre associé est $\mathbb{R}$, l'espace des fonctions constantes.

- Si $\dfrac{1}{\lambda} - 1 > 0$, c'est-à-dire $0 < \lambda < 1$: alors $x^{\frac{1}{\lambda}-1}$ tend vers 0 quand x tend vers 0^+, donc $f(0) = 0$.

  Pour alléger les notations, posons $f_\lambda(x) = x^{\frac{1}{\lambda}-1}$ si $x > 0$ et $f_\lambda(0) = 0$. Nous avons montré : si λ est une valeur propre de T telle que $0 < \lambda < 1$ et f un vecteur propre de T, alors il existe un réel k tel que $f = k\, f_\lambda$. Autrement dit, $\mathrm{Ker}(f - \lambda\ \mathrm{Id}) \subset \mathbb{R}\, f_\lambda$.

  Réciproquement, $T_{f_\lambda} = \lambda f_\lambda$; on a donc $\mathrm{Ker}(f - \lambda\ \mathrm{Id}) = \mathbb{R}\, f_\lambda$. Comme $f_\lambda \neq 0$, λ est bien valeur propre de T.

En résumé, étant donné un réel λ :

- si $\lambda \leqslant 0$ ou $\lambda > 1$, λ n'est pas valeur propre de T ;
- 1 est valeur propre de T et le sous-espace propre associé est $\mathbb{R}$, l'espace des fonctions constantes ;
- si $0 < \lambda < 1$, λ est valeur propre de T et le sous-espace propre associé est $\mathbb{R} f_\lambda$.

Exercice 2.3 : Réduction d'une matrice d'ordre 3

Diagonaliser la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -10 & -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

La matrice étant d'ordre 3 le calcul du polynôme caractéristique peut être un moyen rapide de trouver les valeurs propres. Qui plus est, la présence des zéros de la dernière colonne simplifie grandement le calcul et la factorisation de ce polynôme.

Pour $\lambda \in \mathbb{K}$ on a
$$\begin{aligned}
\det(\lambda\, \mathrm{I}_3 - A) &= \det \begin{pmatrix} \lambda - 6 & -2 & 0 \\ -2 & \lambda - 3 & 0 \\ 10 & 5 & \lambda - 2 \end{pmatrix} \\
&= \left((\lambda - 6)(\lambda - 3) - 4\right)(\lambda - 2) \\
&= (\lambda^2 - 9\lambda + 14)(\lambda - 2) \\
&= (\lambda - 2)^2(\lambda - 7).
\end{aligned}$$

Les valeurs propres de A sont donc 2 et 7.

Pour vérifier que A est diagonalisable nous allons calculer les dimensions des sous-espaces propres de f, l'endomorphisme de $\mathbb{K}^3$ canoniquement associé à A, pour vérifier que leur somme est 3.

La dimension de $\mathrm{Ker}(f - 7\,\mathrm{Id})$ est au moins 1 (par définition d'une valeur propre) et elle est inférieure ou égale à 1 (l'ordre de multiplicité de 7 comme racine du polynôme caractéristique).

Dans le cas d'une valeur propre simple, le sous-espace propre associé est automatiquement de dimension 1. Pour les valeurs propres multiples, on a seulement un encadrement de la dimension.

Il reste à déterminer la dimension du sous-espaces propre associé à la valeur propre 2.

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{K}^3$ tel que $(x, y, z) \in \mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id})$. Il vient, d'après l'expression de $A - 2\,\mathrm{I}_3$, le système :

$$\begin{cases} 4\,x + 2\,y = 0 \\ 2\,x + y = 0 \\ -10\,x - 5\,y = 0 \end{cases}$$

qui se réduit en fait à une seule équation car elles sont toutes trois proportionnelles :

$$2\,x + y = 0.$$

Ainsi $\mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id})$ est de dimension 2, qui est la multiplicité de 2 comme valeur propre de f.
A est donc bien diagonalisable.

Il faut maintenant trouver une base de chacun des espaces propres. Pour $\mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id})$, il suffit de trouver deux vecteurs non colinéaires pour en avoir une base.

On vérifie aisément que, si (e_1, e_2, e_3) désigne la base canonique de $\mathbb{K}^3$, les vecteurs e_3 et $e_1 - 2\,e_2$ sont propres pour f et associés à la valeur propre 2. Comme ils ne sont pas colinéaires et que $\dim(\mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id})) = 2$, ils forment une base de ce sous-espace propre de f.

Enfin, le sous-espace propre associé à 7 est de dimension 1 : il suffit donc de trouver un vecteur non nul de cet espace et il en constituera automatiquement une base.

$$A - 7\,\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \\ -10 & -5 & -5 \end{pmatrix}.$$

donc, si $f(x, y, z) = 0$, on a

$$\begin{cases} -x + 2\,y = 0 \\ 2\,x - 4\,y = 0 \\ -10\,x - 5\,y - 5\,z = 0 \end{cases}$$

Les deux premières équations sont proportionnelles à l'équation $x - 2\,y = 0$. La dernière, divisée par -5, est équivalente à $2\,x + y + z = 0$. On a donc le système équivalent plus simple :

$$\begin{cases} x - 2\,y = 0 \\ 2\,x + y + z = 0 \end{cases}$$

On vérifie aisément que $2\,e_1 + e_2 - 5\,e_3 \in \operatorname{Ker}(f - 7\ \mathrm{Id})$. Comme ce sous-espace propre de f est de dimension 1, ce vecteur propre en forme une base.
Posons

$$\begin{cases} u_1 = e_3 \\ u_2 = e_1 - 2\,e_2 \\ u_3 = 2\,e_1 + e_2 - 5\,e_3 \end{cases}$$

Alors, d'après ce qui précède, (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{K}^3$ constituée de vecteurs propres de f.

Il reste à déterminer la matrice de passage.

La matrice de passage de (e_1, e_2, e_3) à (u_1, u_2, u_3) est

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

Il n'y a aucun calcul à faire pour déterminer $P^{-1}AP$. En effet, ce n'est autre que la matrice de f dans la base (u_1, u_2, u_3).

Sauf si l'énoncé le demande explicitement, où si une question suivante le nécessite, le calcul de P^{-1} n'est pas nécessaire.

Comme $f(u_1) = 2\,u_1$, $f(u_2) = 2\,u_2$ et $f(u_3) = 7\,u_3$ nous obtenons, sans calcul supplémentaire :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Connaître *a priori* la dimension d'un sous-espace vectoriel est extrêmement pratique pour en déterminer une base, surtout en petite dimension, comme on vient de le voir : si la dimension est 1 il suffit de trouver un vecteur non nul, si elle est 2 il suffit de trouver deux vecteurs non colinéaires.

Exercice 2.4 : Diagonalisation

Soient un entier $n \geqslant 3$ et
$$A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & 0 & \\ \vdots & 0 & \ddots & \\ 1 & & & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).$$
Déterminer les éléments propres de A . Est-elle diagonalisable ? Que vaut son déterminant ?

Nous allons d'abord déterminer les valeurs propres en cherchant les réels λ pour lesquels le système $AX = \lambda X (X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}))$ possède au moins une solution $X \neq 0$.

En taille n, il ne faut pas toujours se lancer tête baissée dans le calcul du polynôme caractéristique. Dans certains cas, il est plus simple de résoudre le système $AX = \lambda X$, surtout lorsqu'il faut déterminer les espaces propres.

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul, X est vecteur propre de A de valeur propre associée λ si et seulement si $AX = \lambda X$.
L'égalité $AX = \lambda X$ est équivalente au système :
$$(S) \qquad \begin{cases} x_1 + \cdots + x_n = \lambda x_1 \\ x_1 + x_2 = \lambda x_2 \\ \vdots \\ x_1 + x_n = \lambda x_n \end{cases}$$

En particulier, pour $k \in \{2, \ldots, n\}$: $x_1 = (\lambda - 1) x_k$. Ainsi, il est naturel de distinguer le cas $\lambda = 1$.

Supposons $\lambda \neq 1$. Alors les équations 2 à n donnent
$$\forall k \in \{2, \ldots, n\}, \quad x_k = \frac{1}{\lambda - 1} x_1$$
ce qui montre en particulier que $x_2 = \cdots = x_n$.
La première équation, compte tenu de ces égalités, se réduit alors à
$$x_1 + (n-1) x_2 = \lambda x_1.$$

Par ailleurs, nous avons vu que $x_2 = \dfrac{1}{\lambda - 1}\, x_1$ d'où enfin :

$$\frac{n-1}{\lambda-1}\, x_1 = (\lambda - 1)\, x_1 \quad \text{i.e.} \quad (n-1)\, x_1 = (\lambda-1)^2\, x_1.$$

Peut-on diviser par x_1 afin de déterminer les valeurs possibles de λ ? Si x_1 est nul, alors pour $k \geqslant 2$: $x_k = \dfrac{1}{\lambda-1}\, x_1 = 0$. On a donc $X = 0$, ce qui contredit l'hypothèse faite sur X.

Si x_1 était nul, X serait nul, ce qui est exclu. Ainsi :

$$(n-1) = (\lambda-1)^2$$

d'où l'on tire les valeurs possibles de λ : si λ est une valeur propre de A distincte de 1 alors $\lambda = 1 + \sqrt{n-1}$ ou $\lambda = 1 - \sqrt{n-1}$.

Remarquons que ces deux valeurs propres potentielles sont distinctes.
Il faut désormais déterminer si ce sont bien des valeurs propres de A et, si oui, déterminer le sous-espace propre associé.
Ce ne sera pas bien difficile car l'essentiel des calculs a déjà été effectué précédemment : il suffit de remplacer λ par l'une des deux valeurs possibles trouvées ci-dessus.

Soient $\lambda_1 = 1 + \sqrt{n-1}$ et $E_1 = \mathrm{Ker}(A - \lambda_1\, \mathrm{I}_n)$.
D'après les calculs précédents, $X \in E_1$ si et seulement si

$$\forall k \in \{2, \ldots, n\}, \quad x_k = \frac{1}{\lambda-1}\, x_1 = \frac{1}{\sqrt{n-1}}\, x_1.$$

Autrement dit, si et seulement si, $x = x_1(\sqrt{n-1}, 1, \ldots, 1)^T$ ce dont on déduit que $E_1 = \mathbb{R}(\sqrt{n-1}, 1, \ldots, 1)^T$.
En conclusion : $1 + \sqrt{n-1}$ est valeur propre de A et le sous-espace propre associé est la droite $\mathbb{R}(\sqrt{n-1}, 1, \ldots, 1)^T$.

Dans ce qui précède, l'utilisation du signe transposée n'est ici utilisé que par commodité typographique. Il vaut mieux écrire les vecteurs colonnes.

Le cas de $1 - \sqrt{n-1}$ se traite identiquement.

Soit $\lambda_2 = 1 - \sqrt{n-1}$ et $E_2 = \mathrm{Ker}(A - \lambda_2\, \mathrm{I}_n)$.
D'après les calculs précédents, $X \in E_2$ si et seulement si

$$\forall k \in \{2, \ldots, n\}, \quad x_k = \frac{1}{\lambda-1}\, x_1 = -\frac{1}{\sqrt{n-1}}\, x_1.$$

Autrement dit, si et seulement si $x = x_1(-\sqrt{n-1}, 1, \ldots, 1)^T$ ce dont on déduit que $E_2 = \mathbb{R}(-\sqrt{n-1}, 1, \ldots, 1)^T$.

En conclusion : $1-\sqrt{n-1}$ est valeur propre de A et le sous-espace propre associé est la droite $\mathbb{R}(-\sqrt{n-1},1,\ldots,1)^T$.

Il reste à étudier le cas $\lambda = 1$. Dans ce cas, le système (S) se simplifie considérablement.

Supposons $\lambda = 1$: le système (S) se réduit à deux équations :

$$\begin{cases} x_1 + \cdots + x_n = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases}$$

la première se simplifiant même en $x_2 + \cdots + x_n = 0$. Ainsi, en notant

$$E_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})\,;\ x_1 = 0 \text{ et } x_2 + \cdots + x_n = 0 \right\}$$

on a $\mathrm{Ker}(A - \mathrm{I}_n) = E_3$.

Nous n'avons pas encore tout à fait démontré que 1 est valeur propre de A : il pourrait en effet se faire que E_3 soit réduit à $\{0\}$.
D'une part, une solution de (S) vérifie nécessairement $x_1 = 0$.
D'autre part, comme $n \geqslant 3$ l'équation $x_2 + \cdots + x_n = 0$ contient au moins deux termes ; il suffit d'en prendre un égal à 1, un autre égal à -1 et tous les autres nuls pour en avoir une solution non nulle. Nous aurons ainsi bien utilisé le fait que $n \geqslant 3$.

Soit le vecteur $X = (0,1,-1,0,\ldots,0)^T$ (si $n > 3$) ou $X = (0,1,-1)^T$ (si $n = 3$). Alors $X \in E_3$ car les coordonnées de X vérifient bien $x_1 = 0$ et $x_2 + \cdots + x_n = 0$. De plus, $X \neq 0$. Ainsi, E_3 n'est pas réduit à $\{0\}$. Ceci montre que 1 est valeur propre de A et que le sous-espace propre associé est E_3.
En conclusion, A possède trois valeurs propres : $1+\sqrt{n-1}$, $1-\sqrt{n-1}$ et 1. Les sous-espaces propres associés sont respectivement E_1, E_2 et E_3.

A est diagonalisable si et seulement si, la somme des dimensions de ses sous-espaces propres est n.
Il est clair que $\dim(E_1) = \dim(E_2) = 1$. Reste à calculer $\dim(E_3)$, la difficulté étant que E_3 est donné par un système d'équations.
Pour déterminer cette dimension, on peut chercher une base de E_3. Cependant, on peut aussi calculer cette dimension par le théorème du rang. En effet, il est souvent assez simple de déterminer le rang d'une matrice par des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes. Parfois, le rang est même évident sans qu'il n'y ait à faire ces opérations ; c'est le cas quand beaucoup de colonnes sont colinéaires voire égales.

Déterminons la dimension de E_3 :

$$\dim(E_3) = \dim(\mathrm{Ker}(A - \lambda \mathrm{I}_n)) = n - \mathrm{rg}(A - \mathrm{I}_n)$$

La matrice

$$A - \mathrm{I}_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & 0 & \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

est de rang 2 donc $\dim(E_3) = n - 2$.

Connaître la dimension de E_3 facilite la recherche d'une base de cet espace : en effet, il suffirait désormais de trouver une famille libre de $n-2$ vecteurs de E_3 pour en avoir une base.

La somme des dimensions des sous-espaces propres de A est n donc A est diagonalisable.
A est donc semblable à la matrice

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & 0 \\ & \lambda_2 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}$$

et en particulier a même déterminant, à savoir

$$\lambda_1 \lambda_2 = (1 + \sqrt{n-1})(1 - \sqrt{n-1}) = 2 - n.$$

Si $n = 2$, les équations vérifiées par les éléments $(x_1, x_2)^T \in E_3$ se résument à $x_1 = x_2 = 0$; ainsi, $E_3 = \{0\}$ est 1 n'est pas valeur propre de A. En revanche, comme $\sqrt{n-1} = 1$, $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = 0$ sont valeurs propres distinctes de sous-espaces propres associés respectifs $\mathbb{R}(-1,1)^T$ et $\mathbb{R}(1,1)^T$ et A est encore diagonalisable.

Exercice 2.5 : Trigonalisation

Soit la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 \\ 6 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}).$$

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.
1. Calculer les puissances de $A - \mathrm{I}_3$.
Pour $k \in \{1, 2, 3\}$ on pose $E_k = \mathrm{Ker}((f - \mathrm{Id})^k)$.
2. Démontrer que $\dim(E_k) = k$.
3. En déduire une base (u_1, u_2, u_3) de E_3 telle que (u_1) est une base de E_1 et (u_1, u_2) est une base de E_2.
4. Déterminer une matrice B triangulaire supérieure et semblable à A ainsi que les matrices de passage correspondantes.

1. Cette question est un simple calcul de produits matriciels.

On a successivement :

$$A - \mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 0 \\ 6 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad (A - \mathrm{I}_3)^2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -2 \\ -8 & -8 & 4 \\ -8 & -8 & 4 \end{pmatrix}$$

et $(A - \mathrm{I}_3)^3 = 0$. Au vu de cette dernière relation on a donc $(A - \mathrm{I}_3)^n = 0$ pour tout $n \geqslant 3$.

2. D'une manière générale, si g et h sont deux endomorphismes d'un espace vectoriel, on a toujours $\mathrm{Ker}(h) \subset \mathrm{Ker}(g \circ h)$: en effet, si $h(x) = 0$, alors

$$(g \circ h)(x) = g(h(x)) = g(0) = 0.$$

On a les inclusions :

$$\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}) \subset \mathrm{Ker}((f - \mathrm{Id})^2) \subset \mathrm{Ker}((f - \mathrm{Id})^3) = \mathbb{R}^3.$$

Le théorème du rang permet de faire le lien entre la dimension de $\mathrm{Ker}((f - \mathrm{Id})^k)$ et $\mathrm{rg}((f - \mathrm{Id})^k) = \mathrm{rg}((A - \mathrm{I}_3)^k)$.
Pour calculer le rang, on dispose d'une méthode générale consistant à effectuer des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes. Cependant, on peut aussi parfois identifier le rang immédiatement : c'est ici le cas de $(A - \mathrm{I}_3)^3$, qui est nulle donc de rang nul, et $(A - \mathrm{I}_3)^2$, dont toutes les colonnes sont colinéaires.

On calcule les dimensions des noyaux à l'aide du rang.

- Comme $(A - \mathrm{I}_3)^3 = 0$, $(f - \mathrm{Id})^3 = 0$ et donc $\mathrm{Ker}((f - \mathrm{Id})^3) = \mathbb{R}^3$. Ainsi, $\dim(E_3) = 3$.
- Les colonnes de la matrice $(A - \mathrm{I}_3)^2$ sont colinéaires ; ainsi, $\mathrm{rg}((A - \mathrm{I}_3)^2) \leqslant 1$. Par ailleurs $(A - \mathrm{I}_3)^2 \neq 0$ donc $\mathrm{rg}((A - \mathrm{I}_3)^2) \neq 0$.

  Ainsi, $\mathrm{rg}((f - \mathrm{Id})^2) = 1$ donc, d'après le théorème du rang, on en déduit que $\dim(\mathrm{Ker}((f - \mathrm{Id})^2)) = 2$.
- La matrice $A - \mathrm{I}_3$ n'est pas nulle et possède deux colonnes non colinéaires : son rang est donc au moins 2.

  Si son rang était 3, elle serait inversible et donc toutes ses puissance également, en particulier $(A - \mathrm{I}_3)^3$, qui est nulle. Ainsi, $A - \mathrm{I}_3$ n'est pas inversible, donc son rang est 2. On en déduit $\dim(\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})) = 1$.

Nous aurions aussi pu remarquer, pour cette dernière matrice, que la première colonne est une combinaison linéaire des deux autres (le double de leur somme).

3. Il est aisé de construire des bases de ce type. En effet, une base de E_1 est une famille libre de E_2 donc peut être complétée en une base de E_2, etc.
Nous connaissons les dimensions des espaces E_k, ce qui simplifie la détermination de bases. En effet :

- E_1 est de dimension 1, donc toute famille libre à un élément en est une base. Autrement dit, on peut prendre pour u_1 n'importe quel élément non nul de E_1.

- E_2 est de dimension 2. La famille (u_1, u_2) étant de cardinal $2 = \dim(E_2)$ il suffit qu'elle soit libre pour être une base de E_2. Autrement dit, si u_2 est n'importe quel vecteur de E_2 non colinéaire à u_1, (u_1, u_2) est une base de E_2.
- Enfin, $E_3 = \mathbb{R}^3$ est de dimension 3. Sachant que (u_1, u_2) est libre, il suffit donc de prendre pour u_3 n'importe quel vecteur n'appartenant pas à $\mathrm{Vect}(u_1, u_2)$, c'est-à-dire à E_2, pour que (u_1, u_2, u_3) soit également libre, et donc une base de $\mathbb{R}^3$ puisqu'elle a $3 = \dim(\mathbb{R}^3)$ vecteurs.

On voit en particulier qu'il y a beaucoup (en fait, une infinité) de choix possibles pour une telle base. Nous essaierons donc de faire en sorte que les vecteurs u_k choisis soient « les plus simples possibles ». En pratique, ceci signifie qu'on essaiera de faire en sorte que leurs coordonnées dans la base canonique soient de petits entiers. Ceci permettra d'avoir des matrices de passage simples.

> ⚠ Il ne faut surtout pas chercher la base demandée sous forme de trois vecteurs ayant chacun trois coordonnées inconnues.

Commençons donc par chercher un élément non nul de $E_1 = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$.
Si $(x, y, z) \in E_1$ alors

$$(A - \mathrm{I}_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ce qui se traduit par le système :

$$\begin{cases} -4\,x - 2\,y = 0 \\ 6\,x + 2\,y + z = 0 \\ 4\,x + 2\,z = 0 \end{cases}$$

La première équation donne $y = -2\,x$ et la troisième $z = -2\,x$. Ainsi, on obtient $(x, y, z) = x(1, -2, -2)$. Réciproquement, $(1, -2, -2)$ est bien solution de ce système donc le vecteur $u_1 = (1, -2, -2)$ est un élément non nul de E_1.
Alternativement, les égalités $(f - \mathrm{Id})^3 = (f - \mathrm{Id}) \circ (f - \mathrm{Id})^2$ et $\mathrm{Ker}((f - \mathrm{Id})^3) = \mathbb{R}^3$ entraînent $\mathrm{Im}((f - \mathrm{Id})^2) \subset \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$. Il suffit donc de trouver un élément non nul de $\mathrm{Im}((f - \mathrm{Id})^2)$. Ceci est facile puisque les vecteurs colonnes de la matrice $(A - \mathrm{I}_3)^2$ engendrent $\mathrm{Im}((f - \mathrm{Id})^2)$; comme ces colonnes sont colinéaires à $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$, on retrouve le fait que $(1, -2, -2)$ est élément de $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$.

> On vérifie facilement que $u_1 = e_1 - 2\,e_2 - 2\,e_3$ est un vecteur non nul de E_1, qui est de dimension 1. La famille (u_1) est donc une base de E_1.

Cherchons à compléter (u_1) en une base de $\mathrm{Ker}((f - \mathrm{Id})^2)$. Pour cela, il suffit de trouver un vecteur $u_2 \in \mathrm{Ker}((f - \mathrm{Id})^2)$ non colinéaire à u_1.
Si $u_2 = x\,e_1 + y\,e_2 + z\,e_3$, la relation $(f - \mathrm{Id})^2(u_2) = 0$ donne $2\,x + 2\,y - z = 0$. On peut chercher u_2 convenant avec un maximum de coordonnées nulles pour faciliter les calculs ultérieurs.

Si deux des coordonnées sont nulles, la relation $2x+2y-z=0$ montre que la troisième est nulle et donc u_2 également, ce qui est exclu.
Si $x=0$, alors on peut prendre $y=1$ et $z=2$. On obtient ainsi bien un vecteur qui n'est pas colinéaire à u_1.

On a $E_1 \subset E_2$, donc $u_1 \in E_2$. Le vecteur $e_2 + 2\,e_3$ n'est pas colinéaire à u_1 et est bien élément de E_2 donc (u_1, u_2) est une famille libre de E_2. Comme $\dim(E_2) = 2$, c'est bien une base de E_2 telle que (u_1) est une base de E_1.

On aurait aussi bien pu choisir $y=0$ puis $x=1$ et $z=2$, ou $z=0$ puis $x=1$ et $y=-1$, ou même des coordonnées toutes non nulles, comme $x=y=1$ et $z=4$.

Enfin, on peut prendre pour u_3 n'importe quel vecteur qui n'est pas élément de E_2, c'est-à-dire $u_3 = x\,e_1 + y\,e_2 + z\,e_3$ avec $2\,x+2\,y-z \neq 0$. Encore une fois, une infinité de choix se présente mais il y en a de plus simples que d'autres : prendre deux coordonnées nulles et la troisième égale à 1. N'importe lequel des trois vecteurs e_1, e_2 et e_3 est un choix convenable pour u_3. Nous allons cependant choisir $u_3 = e_3$ afin que la matrice de passage soit triangulaire : vu qu'il faudra effectuer un calcul de changement de base, donc en particulier inverser cette matrice de passage, autant la choisir de sorte que les calculs soient les plus simples possibles !

Le vecteur $u_3 = e_3$ n'appartient pas à E_2 ; la famille (u_1, u_2, u_3) est donc une famille libre de E_3, qui est de dimension 3, et en est donc une base.

En résumé, nous avons :

$$\begin{cases} u_1 = e_1 - 2\,e_2 - 2\,e_3 \\ u_2 = e_2 + 2\,e_3 \\ u_3 = e_3 \end{cases}$$

4. Les relations précédentes donnent la matrice de passage demandée.

La matrice de passage de (e_1, e_2, e_3) à (u_1, u_2, u_3) est

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il s'agit désormais d'inverser le système précédent pour exprimer les e_i en fonction des u_j. Ceci est facile car la matrice est triangulaire.

La définition de (u_1, u_2, u_3) donnée précédemment permet d'obtenir aisément :

$$\begin{cases} e_1 = u_1 + 2\,u_2 - 2\,u_3 \\ e_2 = u_2 - 2\,u_3 \\ e_3 = u_3 \end{cases}$$

La matrice de passage de (u_1, u_2, u_3) à (e_1, e_2, e_3) est donc :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Enfin, en notant B la matrice de f dans la base (u_1, u_2, u_3), on a $P^{-1}AP = B$. On en déduit :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 2.6 : Réduction d'une matrice à paramètres

Pour quelles valeurs des scalaires a, b, c et d la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}$$

est-elle diagonalisable ?

Cette matrice est triangulaire : ses valeurs propres sont donc simplement ses coefficients diagonaux.
Partant des valeurs propres, il suffit de déterminer la dimension des sous-espaces propres associés pour déterminer si la matrice est ou non diagonalisable : une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice de taille n soit diagonalisable est que chaque son polynôme caractéristique soit scindé et que chaque sous-espace propre soit de même dimension que la multiplicité de la valeur propre associée. Un tel calcul de dimension de noyau peut se ramener à un calcul, plus simple, de rang via le théorème du même nom.

Lorsque l'énoncé ne demande pas de diagonaliser une matrice, il n'est pas nécessaire de résoudre le système associé à chaque sous-espace propre.

Il y a visiblement trois cas à distinguer selon que $d = 1$, $d = 2$ ou $d \notin \{1, 2\}$. En effet, dans ce dernier cas, la matrice a trois valeurs propres distinctes. D'une manière générale, si une matrice $n \times n$ possède n valeurs propres distinctes, elle est diagonalisable.

La matrice A étant triangulaire, ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux : 1, 2 et d.
Supposons $d \notin \{1, 2\}$. A est alors une matrice 3×3 possédant 3 valeurs propres distinctes donc A est diagonalisable.

Dans les cas $d = 1$ et $d = 2$, les rangs de $A - \mathrm{I}_3$ et $A - 2\,\mathrm{I}_3$ se calculent sans peine.

Supposons $d = 2$. Les valeurs propres de A sont 1 (simple) et 2 (double).
D'une part, $\dim(\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})) = 1$ (puisque 1 est valeur propre simple).
D'autre part,

$$A - 2\,\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} -1 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si $c = 0$, cette matrice est de rang 1. Sinon, elle est de rang 2. La dimension de $\mathrm{Ker}(f - 2\ \mathrm{Id})$ est donc 2 si $c = 0$ et 1 si $c \neq 0$.
Ainsi : si $d = 2$ A est diagonalisable si et seulement si $c = 0$.

Traitons enfin le dernier cas.

Supposons $d = 1$. Les valeurs propres de A sont 1 (double) et 2 (simple).
D'une part,

$$A - \mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est de rang 1 ou 2 selon que $a\,c = b$ ou non. $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$ est donc de dimension 1 (si $a\,c \neq b$) ou 2 (si $a\,c = b$).
D'autre part, $\dim(\mathrm{Ker}(f - 2\ \mathrm{Id})) = 1$ (car 2 est valeur propre simple).
En particulier, la somme des dimensions des sous-espaces propres est 3 si, et seulement si, $ac = b$.
Ainsi : si $d = 1$ A est diagonalisable si et seulement si $a\,c = b$.

La condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité peut se résumer ainsi :

$$d \notin \{1, 2\} \text{ ou } (c, d) = (0, 2) \text{ ou } (b, d) = (a\,c, 1).$$

Exercice 2.7 : Diagonalisation simultanée

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.
1. Soient u et v deux endomorphismes diagonalisables de E. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(v)$ sont diagonales ;

(2) $u \circ v = v \circ u$.

2. Soit A un sous-ensemble non vide de $\mathscr{L}(E)$ dont tous les éléments sont diagonalisables. On suppose que, pour tout $(f, g) \in A^2$, $f \circ g = g \circ f$. Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que, pour tout $f \in A$, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ est diagonale. On pourra raisonner par récurrence sur n en distinguant le cas où tous les éléments de A sont des homothéties.

1. Pour montrer l'équivalence, on doit faire deux implications. On commence par la plus simple.

$1 \implies 2$: notons $(e_1, \ldots, e_n)$ les vecteurs de $\mathscr{B}$. Il existe des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ et $\mu_1, \ldots, \mu_n$ tels que, pour tout i : $u(e_i) = \lambda_i\, e_i$ et $v(e_i) = \mu_i\, e_i$. En particulier, $u(v(e_i)) = \lambda_i\, \mu_i\, e_i$ et $v(u(e_i)) = \mu_i\, \lambda_i\, e_i$; $u \circ v$ et $v \circ u$ coïncident sur la base $\mathscr{B}$ et sont donc égaux.

Alternativement, on aurait pu considérer U (resp. V) la matrice de u (resp. v) dans $\mathscr{B}$ et constater que, ces deux matrices étant diagonales, on a $U\,V = V\,U$.
L'autre implication est plus difficile. Rappelons une propriété fondamentale des sous-espaces propres : si deux endomorphismes d'un espace vectoriel commutent, tout sous-espace propre de l'un est stable par l'autre.
Nous savons que E possède une base de vecteurs propres pour u et aussi une base de vecteurs propres pour v. Le but de la question est de démontrer qu'il existe une base constituée de vecteurs propres pour u et v simultanément. Le problème est qu'une base de vecteurs propres pour l'un n'a *a priori* aucune raison d'être une base de vecteurs propres pour l'autre.
Cependant, si u est une homothétie, tout se simplifie : toute base de E est une base de vecteurs propres pour u donc n'importe quelle base de vecteurs propres pour v est aussi une base de vecteurs propres pour u.
Dans le cas général, u n'est pas forcément une homothétie mais u induit une homothétie sur chacun de ses sous-espaces propres. Si F est un sous-espace propre de u et que F est stable par v alors l'endomorphisme v_F de F induit par v est diagonalisable (car v l'est) et l'endomorphisme u_F induit par u est une homothétie (par définition d'un sous-espace propre). On peut donc trouver une base de F consitutée de vecteurs propres de v_F et qui seront automatiquement vecteurs propres de u_F. Il faudra ensuite « remonter » à l'espace E et aux endomorphismes u et v ; pour cela, on pourra utiliser le fait que E est la somme directe des sous-espaces propres de u.

Il faut donc savoir si les sous-espaces propres de u sont bien stables par v. Justement, il est supposé que u et v commutent, donc tout sous-espace propre de u est stable par v.

$2 \implies 1$: u et v commutant, tout sous-espace propre de l'un est stable par l'autre.
De plus, tout endomorphisme induit sur un sous-espace stable par un endomorphisme diagonalisable est diagonalisable. Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres distinctes de u et $E_k = \mathrm{Ker}(u - \lambda_k \,\mathrm{Id})$ les sous-espaces propres associés.
Pour chaque k, E_k est stable par v car u et v commutent et E_k est le noyau d'un polynôme en u. v induit donc un endomorphisme v_k de E_k. v étant diagonalisable, v_k l'est également : il existe une base $\mathscr{B}_k$ de E_k constituée de vecteurs propres de v_k (et donc de v).
Par ailleurs, E_k est un sous-espace propre de u : tous ses éléments sont donc vecteurs propres de u. En particulier, les vecteurs de la base $\mathscr{B}_k$ sont propres pour u. Ainsi, $\mathscr{B}_k$ est une base de E_k dont tous les éléments sont vecteurs propres de u et de v.
Soit $\mathscr{B}$ la famille de vecteurs obtenue en concaténant $\mathscr{B}_1, \dots, \mathscr{B}_r$. Comme chaque famille $\mathscr{B}_k$ est une base de E_k et que E est la somme directe des E_k, $\mathscr{B}$ est une base de E. Dans cette base, les matrices de u et de v sont diagonales.

2. Si tous les éléments de A sont des homothéties, il n'y a rien à faire : la matrice d'une homothétie dans n'importe quelle base est diagonale et donc n'importe quelle base de E convient.
Dans le cas contraire, l'un des éléments de A n'est pas une homothétie : nous pouvons nous ramener à des espaces de dimension plus faible (pour pouvoir raisonner par récurrence sur la dimension) en considérant ses sous-espaces propres. En effet, un endomorphisme diagonalisable qui n'est pas une homothétie possède plusieurs sous-espaces propres, qui sont donc tous de dimensions strictement inférieures à celle de E.

On aura besoin de l'hypothèse de récurrence pour un $k < n+1$, mais on ne sait pas lequel. Il faut donc faire une récurrence forte.

Montrons par récurrence forte sur $n \in \mathbb{N}^*$ la propriété H_n : « Si E est un espace vectoriel de dimension n, A un sous-ensemble non vide de $\mathscr{L}(E)$ dont les éléments sont diagonalisables et commutent deux à deux, alors il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que, pour tout $f \in A$, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ est diagonale. »

- H_1 est vraie car toute matrice 1×1 est diagonale.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $H_1, \dots, H_n$. Considérons un espace vectoriel E de dimension $n+1$ et A une partie non vide de $\mathscr{L}(E)$ dont les éléments sont diagonalisables et commutent deux à deux.

Si tous les éléments de A sont des homothéties, n'importe quelle base de E convient.

Sinon, soit un élément f de A qui n'est pas une homothétie. f est diagonalisable par hypothèse et, en notant $E_1, \ldots, E_r$ ses sous-espaces propres, on a donc $E = \bigoplus_{k=1}^{r} E_k$.

Par ailleurs, f n'est pas une homothétie donc f a plusieurs valeurs propres. Ainsi, $r \geqslant 2$. On a donc $\dim(E_1) + \cdots + \dim(E_r) = n + 1$, avec $r \geqslant 2$ et $\dim(E_k) \geqslant 1$, ce qui impose $\dim(E_k) \leqslant n$ pour $k \in \{1, \ldots, r\}$.

Pour tout élément g de A, E_k est stable par g, car f et g commutent. L'endomorphisme g_k de E_k induit par g est diagonalisable, car g l'est. Enfin, pour tous g et $h \in A$, $g_k \circ h_k = h_k \circ g_k$ car $g \circ h = h \circ g$.

Ainsi, par hypothèse de récurrence (H_p avec $p = \dim(E_k) \leqslant n$), il existe une base $\mathscr{B}_k$ de E_k telle que, pour tout $g \in A$, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_k}(g_k)$ est diagonale ; autrement dit, $\mathscr{B}_k$ est une base de E_k dont tous les éléments sont vecteurs propres de tous les élements de A.

Comme $E = \bigoplus_{k=1}^{r} E_k$ la famille $\mathscr{B}$ obtenue en concaténant $\mathscr{B}_1, \ldots, \mathscr{B}_r$ est une base de E.

Enfin, pour tout $k \in \{1, \ldots, r\}$, les vecteurs de $\mathscr{B}_k$ sont vecteurs propres de tous les éléments de A ; ainsi, les vecteurs de $\mathscr{B}$ sont vecteurs propres de tous les éléments de A, ce qui montre que la matrice de n'importe quel élément de A dans $\mathscr{B}$ est diagonale, ce qui conclut la récurrence.

Exercice 2.8 : Réduction des matrices de trace nulle

1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) de dimension finie $n \geqslant 1$ et f un endomorphisme de E. On suppose que, pour tout $x \in E$, $f(x) \in \mathbb{K}\, x$. Démontrer que f est une homothétie, c'est-à-dire qu'il existe un scalaire λ tel que $f = \lambda\, \mathrm{Id}_E$.
2. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice non nulle de trace nulle. Montrer qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que la première colonne de $P^{-1}MP$ soit nulle, sauf le deuxième coefficient qui vaut 1.
3. Montrer que toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ de trace nulle est semblable à une matrice dont tous les coefficients diagonaux sont nuls. On pourra raisonner par récurrence sur n.

1. Ce résultat n'a a priori rien d'évident. L'hypothèse est que, pour tout élément x de E, il existe un scalaire λ_x tel que $f(x) = \lambda_x\, x$. La conclusion est qu'il existe un scalaire λ tel que, pour tout élément x de E, $f(x) = \lambda\, x$. Ces deux énoncés diffèrent par l'ordre des quantificateurs : dans le premier cas, le scalaire dépend de x, alors qu'il n'en dépend pas dans le second ! Autrement dit, il s'agit de montrer que les scalaires λ_x sont en fait tous égaux.

Il faut bien faire la distinction entre une phrase logique du type $\forall x, \exists \lambda$, où pour chaque x, on obtient un λ **dépendant** de x, et une phrase du type $\exists \lambda, \forall x$ qui nous donne un λ constant, qui marche pour tous les x.

Tous les éléments non nuls de E sont vecteurs propres de f ; en particulier, toute base de E est une base de vecteurs propres de f (et donc f est diagonalisable). Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Il existe des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, $f(e_k) = \lambda_k\, e_k$. Il suffit de montrer que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n$.
Si $n = 1$, il n'y a rien à faire.
Sinon, pour k et l distincts : $f(e_k + e_l) = \lambda_k\, e_k + \lambda_l\, e_l$. Mais il existe aussi un scalaire μ tel que $f(e_k + e_l) = \mu\,(e_k + e_l)$ ($\mu = \lambda_{e_k+e_l}$ avec les notations vues plus haut). Ainsi :

$$\lambda_k\, e_k + \lambda_l\, e_l = \mu\,(e_k + e_l).$$

Comme $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E on a

$$\lambda_k = \mu = \lambda_l.$$

Ainsi, $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n$.

2. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à M. Supposons que P existe et soit $\mathscr{B}$ la base de $\mathbb{K}^n$ telle que P est la matrice de passage de la base canonique à $\mathscr{B}$: alors $P^{-1}MP$ est la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ et le fait que la première colonne de cette matrice soit nulle, sauf le deuxième coefficient qui vaut 1, signifie que l'image par f du premier vecteur de $\mathscr{B}$ est le deuxième vecteur de $\mathscr{B}$. Ainsi, il s'agit de démontrer l'existence d'une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E telle que $f(e_1) = e_2$.
Il suffit pour cela de disposer d'un vecteur x tel que $(x, f(x))$ est libre : en complétant n'importe comment cette famille en une base de E nous aurons une base qui convient.

Nous devons envisager le cas où toutes les familles $(x, f(x))$ sont liées puisqu'alors l'argument précédent ne tient pas. C'est précisément ici qu'intervient le résultat de la première question : il faut distinguer deux cas selon que f est une homothétie ou non.

Distinguons deux cas.

- Si l'endomorphisme canoniquement associé f est une homothétie : M est de la forme $\lambda\, \mathrm{I}_n$ et sa trace est $\lambda\, n$. Ainsi, $\lambda = 0$ et donc $M = 0$, ce qui est exclu. Ce cas est donc impossible.

- Si f n'est pas une homothétie : il existe $x \in E$ tel que $f(x) \notin \mathbb{K}x$. Si $a\,x + b\,f(x) = 0$ alors $b = 0$ (car sinon $f(x) = -\left(\dfrac{a}{b}\right) x \in \mathbb{K}x$) d'où $a\,x = 0$. $x \neq 0$ (car sinon $f(x) = 0 \in \mathbb{K}x = \{0\}$) donc $a = 0$. Ainsi, $(x, f(x))$ est libre. D'après le théorème de la base incomplète, il existe une base $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E telle que $e_1 = x$ et $e_2 = f(x)$. Alors la première colonne de $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ est nulle, sauf le deuxième coefficient qui vaut 1, car $f(e_1) = e_2$. En notant P la matrice de passage de la base canonique à $\mathscr{B}$, la matrice précédente n'est autre que $P^{-1}MP$, qui possède donc la propriété désirée.

3. Conformément à l'indication, commençons une démonstration par récurrence.

Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ la propriété H_n : « Toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ de trace nulle est semblable à une matrice dont tous les coefficients diagonaux sont nuls. »

- H_1 est clairement vraie puisqu'une matrice 1×1 de trace nulle est nulle.
- Soient $n \in \mathbb{N}^*$ tel que H_n est vraie et $M \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{K})$ de trace nulle.
  Si $M = 0$, M est semblable à elle-même dont les coefficients diagonaux sont nuls.
  Si $M \neq 0$ il existe $P \in GL_{n+1}(\mathbb{K})$ telle que
  $$P^{-1}MP = \left(\begin{array}{c|c} 0 & L \\ \hline 1 & \\ 0 & \\ \vdots & N \\ 0 & \end{array}\right)$$
  avec $L \in \mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ et $N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ d'après la deuxième question.

Nous n'avons à ce stade fait que reprendre les résultats précédents.
Il reste à voir comment utiliser l'hypothèse de récurrence : où y a-t-il une matrice d'ordre strictement inférieur à $n+1$ et de trace nulle ? Clairement, la matrice N convient. Nous allons utiliser l'hypothèse de récurrence pour réduire N et des produits matriciels par blocs permettront de réduire M comme demandé.

On remarque que $\mathrm{tr}(N) = \mathrm{tr}(P^{-1}MP) = \mathrm{tr}(M) = 0$. Ainsi, par hypothèse de récurrence, il existe une matrice $Q \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que tous les coefficients diagonaux de $Q^{-1}NQ$ sont nuls.
Soit $R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n+1}(K)$. R est inversible, d'inverse $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix}$.
Par ailleurs,
$$(PR)^{-1}M(PR) = R^{-1} \left(\begin{array}{c|c} 0 & L \\ \hline 1 & \\ 0 & \\ \vdots & N \\ 0 & \end{array}\right) R = \left(\begin{array}{c|c} 0 & * \\ \hline * & Q^{-1}NQ \end{array}\right).$$

Ainsi, $(PR)^{-1}M(PR)$ est une matrice semblable à M dont tous les coefficients diagonaux sont nuls. La propriété est donc démontrée par récurrence.

Dans la dernière égalité, nous n'avons pas pris la peine d'expliciter tous les blocs de la matrice : en effet, seuls les blocs diagonaux nous intéressaient ici.

Exercice 2.9 : Étude d'un endomorphisme d'un espace d'endomorphismes

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle. Pour $f \in \mathscr{L}(E)$ on définit :

$$\Phi_f : \mathscr{L}(E) \to \mathscr{L}(E), \quad g \mapsto f \circ g.$$

1. Vérifier que, pour tout $f \in \mathscr{L}(E)$, $\Phi_f \in \mathscr{L}(\mathscr{L}(E))$.
2. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que, pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $P(\Phi_f) = \Phi_{P(f)}$.
3. En déduire que Φ_f est diagonalisable si, et seulement si, f l'est.
4. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Décrire $\operatorname{Ker}(\Phi_f - \lambda\,\mathrm{Id}_{\mathscr{L}(E)})$ à l'aide de $\operatorname{Ker}(f - \lambda\,\mathrm{Id}_E)$.

1. La notation ne doit pas effrayer : Φ_f est par définition une application de $\mathscr{L}(E)$ dans lui-même. Dire que $\Phi_f \in \mathscr{L}(\mathscr{L}(E))$ n'est donc rien d'autre que dire que Φ_f est linéaire, c'est-à-dire que l'on a $\Phi_f(\lambda\, g + \mu\, h) = \lambda\, \Phi_f(g) + \mu\, \Phi_f(h)$ pour tous g et $h \in \mathscr{L}(E)$ et λ et μ scalaires ; cette dernière relation peut enfin s'écrire

$$f \circ (\lambda\, g + \mu\, h) = \lambda\, f \circ g + \mu\, f \circ h.$$

Finalement, comme dans presque toutes les questions demandant de vérifier qu'une application est linéaire, il suffit simplement de le vérifier à partir de la définition.

Il faut bien faire la distinction entre les arguments de Φ_f (des fonctions) et les arguments de f (des vecteurs de E).

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Pour tout $(g, h) \in \mathscr{L}(E)^2$ et $(\lambda, \mu) \in K^2$ on a

$$f \circ (\lambda\, g + \mu\, h) = \lambda\, f \circ g + \mu\, f \circ h$$

car f est linéaire. Ainsi :

$$\begin{aligned}\Phi_f(\lambda\, g + \mu\, h) &= f \circ (\lambda\, g + \mu\, h) = \lambda\, f \circ g + \mu\, f \circ h\\ &= \lambda\, \Phi_f(g) + \mu\, \Phi_f(h)\end{aligned}$$

et Φ_f est donc linéaire.

2. Si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ on a, par définition d'un polynôme d'endomorphismes,

$$P(\Phi_f) = \sum_{k=0}^{n} a_k \Phi_f^k.$$

Par ailleurs, pour tout $g \in \mathscr{L}(E)$,

$$\Phi_{P(f)}(g) = P(f) \circ g = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k f^k \right) \circ g = \sum_{k=0}^{n} a_k f^k \circ g.$$

Pour démontrer que $P(\Phi_f) = \Phi_{P(f)}$, il suffit donc de démontrer que $\Phi_f^k(g) = f^k \circ g$ pour tout $g \in \mathscr{L}(E)$, c'est-à-dire $\Phi_f^k = \Phi_{f^k}$. Autrement dit, il suffit de démontrer le résultat dans le cas particulier des monômes X^k, ce qui est moins lourd à écrire et se rédigera aisément par récurrence.

Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété H_n : « $\Phi_f^n = \Phi_{f^n}$. »

- H_0 est vraie : en effet, $\Phi_f^0 = \mathrm{Id}_{\mathscr{L}(E)}$ et $f^0 = \mathrm{Id}_E$, par définition de la puissance 0 d'un endomorphisme d'un espace vectoriel.
  Par ailleurs, pour tout $g \in \mathscr{L}(E)$, $\Phi_{\mathrm{Id}_E}(g) = \mathrm{Id}_E \circ g = g$ donc on obtient $\Phi_{\mathrm{Id}_E} = \mathrm{Id}_{\mathscr{L}(E)}$. Ainsi, $\Phi_f^0 = \Phi_{f^0}$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que H_n. On a donc $\Phi_f^n = \Phi_{f^n}$ c'est-à-dire :
  $$\forall g \in \mathscr{L}(E), \Phi_f^n(g) = f^n \circ g.$$
  On a alors successivement, pour tout $g \in \mathscr{L}(E)$:
  $$\begin{aligned} \Phi_f^{n+1}(g) &= \Phi_f(\Phi_f^n(g)) = \Phi_f(f^n \circ g) = f \circ (f^n \circ g) = f^{n+1} \circ g \\ &= \Phi_{f^{n+1}}(g). \end{aligned}$$
  Ainsi, $\Phi_f^{n+1} = \Phi_{f^{n+1}}$, c'est-à-dire H_{n+1} est vraie.

En conclusion, H_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Traitons maintenant le cas général tel que nous l'avons fait en préambule :

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$. On a

$$P(\Phi_f) = \sum_{k=0}^{n} a_k \Phi_f^k$$

soit, pour tout $g \in \mathscr{L}(E)$:

$$\begin{aligned} P(\Phi_f)(g) &= \sum_{k=0}^{n} a_k \Phi_f^k(g) = \sum_{k=0}^{n} a_k \Phi_{f^k}(g) = \sum_{k=0}^{n} (a_k f^k \circ g) \\ &= \left(\sum_{k=0}^{n} a_k f^k \right) \circ g = P(f) \circ g \\ &= \Phi_{P(f)}(g). \end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout $g \in \mathscr{L}(E)$ nous avons donc démontré :

$$\forall P \in \mathbb{K}[X], \quad P(\Phi_f) = \Phi_{P(f)}.$$

3. Nous avons un lien simple entre polynômes et diagonalisation : un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie est diagonalisable si et seulement si il possède un polynôme annulateur scindé à racines simples.
La question précédente nous fournit justement des renseignements sur les polynômes en f et Φ_f. Plus précisément, l'égalité $P(\Phi_f) = \Phi_{P(f)}$ entraîne que $P(\Phi_f) = 0$ si, et seulement si, $\Phi_{P(f)} = 0$. C'est ce que nous allons vérifier dans un premier temps.

Il est clair que, si $P(f) = 0$, alors $\Phi_{P(f)} = 0$ et donc $P(\Phi_f) = 0$.
Réciproquement, si $P(\Phi_f) = 0$, alors $\Phi_{P(f)} = 0$ donc $P(f) \circ g = 0$ pour tout endomorphisme g de E, en particulier pour $g = \mathrm{Id}_E$, ce qui donne $P(f) = 0$.
Ainsi, f et Φ_f ont les mêmes polynômes annulateurs.
En particulier, Φ_f possède un annulateur scindé à racines simples si, et seulement si, f possède un annulateur scindé à racines simples, donc $\Phi(f)$ est diagonalisable si, et seulement si, f est diagonalisable.

4. Le fait que $g \in \mathrm{Ker}(\Phi_f - \lambda\,\mathrm{Id}_{\mathscr{L}(E)})$ signifie $\Phi_f(g) = \lambda\, g$, soit $f \circ g = \lambda\, g$ et enfin $(f - \lambda\,\mathrm{Id}) \circ g = 0$. Ceci est équivalent à l'inclusion $\mathrm{Im}(g) \subset \mathrm{Ker}(f - \lambda\,\mathrm{Id})$.

Soit $g \in \mathscr{L}(E)$. Alors $g \in \mathrm{Ker}(\Phi_f - \lambda\,\mathrm{Id}_{\mathscr{L}(E)})$ si et seulement si $f \circ g = \lambda\, g$. Cette dernière relation est équivalente à $(f - \lambda\,\mathrm{Id}) \circ g = 0$, elle-même équivalente à $\mathrm{Im}(g) \subset \mathrm{Ker}(f - \lambda\,\mathrm{Id})$. Ainsi :

$$\mathrm{Ker}(\Phi_f - \lambda\,\mathrm{Id}) = \{g \in \mathscr{L}(E) : \mathrm{Im}(g) \subset \mathrm{Ker}(f - \lambda\,\mathrm{Id})\}.$$

Exercice 2.10 : Réduction

Soient un entier $n \geqslant 2$, a un réel non nul, et

$$A = \begin{pmatrix} b & & a \\ & \ddots & \\ a & & b \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).$$

1. Déterminer un polynôme annulateur de A.
2. A est-elle diagonalisable ? Déterminer ses valeurs propres et les dimensions de ses sous-espaces propres.
3. Calculer $\det(A)$.

Remarquons que le cas $a = 0$ ne présenterait aucune difficulté puisqu'alors A serait égale à $b\,\mathrm{I}_n$.

1. Nous savons, d'après le théorème de Cayley-Hamilton, que le polynôme caractéristique de A en est un polynôme annulateur. Cependant, il n'est pas du tout aisé à calculer !
Pour déterminer un polynôme annulateur simple d'une matrice A, on peut essayer de calculer les premières puissances de A et chercher une relation entre elles.
L'idéal est de pouvoir écrire $A = \lambda\,\mathrm{I}_n + B$ avec λ scalaire. En effet, les matrices B et $\lambda\,\mathrm{I}_n$ commutent et on peut donc utiliser la formule du binôme de Newton pour calculer les puissances de A en fonction de celles de B. Ceci est intéressant quand les puissances de B sont simples à calculer, ce qui est le cas, entre autres :

(1) des matrices nilpotentes ;

(2) des matrices diagonales, parfois des matrices triangulaires ;

(3) des matrices dont tous les coefficients sont égaux ;

(4) des matrices « diagonales par blocs » avec de « petits » blocs.

Ici, nous pouvons faire apparaître la matrice J dont tous les coefficients sont égaux à 1 : plus précisément, tous les coefficients de $a\,J$ sont égaux à a donc les coefficients de $a\,J + (b-a)\,\mathrm{I}_n$ sont égaux à a en dehors de la diagonale et b sur la diagonale, c'est-à-dire $a\,J + (b-a)\,\mathrm{I}_n = A$.
Par ailleurs, comme annoncé, les puissances de J sont faciles à calculer car tous les coefficients de J^2 sont égaux à n, c'est-à-dire $J^2 = n\,J$.
Ainsi, lorsque nous calculerons A^2, il apparaîtra un terme en J^2 que nous pourrons exprimer en fonction de J, ce qui permettra de faire réapparaître A à l'aide de la relation $A = a\,J + (b-a)\,\mathrm{I}_n$ et d'obtenir ainsi une relation entre A et A^2.

Soit J la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1.
Alors $J^2 = n\,J$ et on a $A = a\,J + (b-a)\,\mathrm{I}_n$. Comme J et I_n commutent on a

$$A^2 = a^2\,J^2 + (b-a)^2\,\mathrm{I}_n + 2\,a\,(b-a)\,J$$

soit, comme $J^2 = n\,J$,

$$A^2 = (n\,a^2 + 2\,a\,(b-a))\,J + (b-a)^2\,\mathrm{I}_n.$$

Comme $a \neq 0$, on a $J = \dfrac{1}{a}\,A - \left(\dfrac{b}{a} - 1\right)\,\mathrm{I}_n$. En remplaçant J par cette expression dans l'égalité ci-dessus on obtient

$$A^2 = (n\,a^2 + 2\,a\,(b-a))\left(\frac{1}{a}\,A - \left(\frac{b}{a} - 1\right)\,\mathrm{I}_n\right) + (b-a)^2\,\mathrm{I}_n$$

soit, après simplification :

$$A^2 - (n\,a + 2\,(b-a))\,A + (n\,a\,(b-a) + (b-a)^2)\,\mathrm{I}_n = 0.$$

Ainsi, le polynôme

$$P = X^2 - (n\,a + 2\,(b-a))\,X + (n\,a\,(b-a) + (b-a)^2)$$

est un polynôme annulateur de A.

2. La question est de savoir si A possède un polynôme annulateur scindé à racines simples. Commençons donc par étudier les racines de P, ce qui est facile puisque P est de degré 2 : si le discriminant est strictement positif alors P possède deux racines réelles distinctes et est donc scindé à racines simples.

Le discriminant de P est

$$(n\,a + 2\,(b-a))^2 - 4\,(n\,a\,(b-a) + (b-a)^2) = n^2\,a^2 > 0$$

donc P possède deux racines réelles distinctes.
P est un polynôme annulateur scindé à racines simples de A donc A est diagonalisable.

Par ailleurs, les valeurs propres de A sont racines de tout polynôme annulateur de A, en particulier de P. À partir du discriminant de P calculé plus haut on obtient aisément ses racines.

Les racines de P sont $(n\,a + 2\,(b-a) \pm n\,a)/2$, c'est-à-dire $b-a$ et $b+(n-1)\,a$.
Autrement dit, $P = (X-(b-a))\,(X-(b+(n-1)\,a))$
Comme $P(A) = 0$, les valeurs propres de A sont toutes racines de P donc appartiennent à $\{b-a, b+(n-1)\,a\}$.

A priori, il se pourrait que l'un de ces réels ne soit pas valeur propre de A.

Cependant, nous savons ici que A est diagonalisable et a donc au moins une valeur propre. De plus, une matrice diagonalisable qui n'a qu'une seule valeur propre λ est en fait égale à $\lambda\,\mathrm{I}_n$, ce qui n'est pas le cas de A. A possède donc plusieurs valeurs propres, ce qui assure que $b-a$ et $b+(n-1)\,a$ sont bien valeurs propres de A. Cependant, il est ici demandé de calculer les dimensions des sous-espaces propres associés. Il va donc falloir effectuer quelques calculs. Une façon simple d'aborder une telle question est de plutôt calculer des rangs.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A.
Comme $A - (b-a)\,\mathrm{I}_n = a\,J$ on a, d'après le théorème du rang :

$$\begin{aligned}\dim(\operatorname{Ker}(f-(b-a)\ \mathrm{Id})) &= n - \operatorname{rg}(f-(b-a)\ \mathrm{Id})\\ &= n - \operatorname{rg}(A-(b-a)\,\mathrm{I}_n)\\ &= n - \operatorname{rg}(a\,J).\end{aligned}$$

Toutes les colonnes de $a\,J$ sont colinéaires donc $\operatorname{rg}(a\,J) \leqslant 1$. Par ailleurs, comme $a \neq 0$, $a\,J$ n'est pas nulle donc son rang n'est pas nul non plus. Ainsi, $\operatorname{rg}(a\,J) = 1$ donc $\dim(\operatorname{Ker}(f-(b-a)\ \mathrm{Id})) = n-1$.

Sachant que A est diagonalisable, le calcul de la dimension de l'autre sous-espace propre est rapide.

A étant diagonalisable, la somme des dimensions de ses sous-espaces propres est n ; la dimension du sous-espace propre associé à $b+(n-1)\,a$ est donc 1.

On aurait également pu utiliser le fait que la trace de A (nb) est la somme des valeurs propres comptées avec multiplicité. Ainsi, notant k la multiplicité de $b-a$,$b+(n-1)\,a$ est de multiplicité $n-k$ (car A est diagonalisable) donc

$$k(b-a) + (n-k)\,(b+(n-1)\,a) = nb,$$

ce qui donne $k = n-1$.

Le fait de savoir qu'une matrice est diagonalisable (par exemple lorsqu'on a constaté qu'elle avait un polynôme annulateur scindé à racines simples) permet d'abréger le calcul de la dimension des sous-espaces propres : la dernière dimension est imposée par le fait que la somme de toutes ces dimensions est égale à n.
Cependant, si l'on ne sait pas que la matrice est diagonalisable, il faut calculer « à la main » toutes ces dimensions et voir si leur somme est égale à n pour conclure quant à la diagonalisabilité.

3. Nous connaissons les valeurs propres et les dimensions des sous-espaces propres associés, donc nous connaissons une matrice diagonale semblable à A sans avoir besoin de calculer des matrices de passage !

D'après les questions précédentes, A est semblable à

$$\begin{pmatrix} b-a & & & 0\\ & \ddots & & \\ & & b-a & \\ 0 & & & b+(n-1)\,a \end{pmatrix}.$$

En particulier, ces deux matrices ont même déterminant. On en déduit

$$\det(A) = (b-a)^{n-1}\,(b+(n-1)\,a).$$

Exercice 2.11 : Diagonalisabilité et sous-espaces stables

Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et $u \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que u est diagonalisable si et seulement si tout sous-espace F de E stable par u admet un supplémentaire stable par u.

Pour montrer cette caractérisation, il faut montrer un sens puis l'autre.

► Sens direct

Dans le sens direct, pour commencer, on se donne un sous-espace stable. Il faut montrer l'existence d'un supplémentaire stable. Comme dans la preuve du cours, qui montre l'existence d'un supplémentaire en dimension finie, on pense alors au théorème de la base incomplète.

Supposons u diagonalisable, on a alors B une base de E, constituée de vecteurs propres pour u. Soit F un sous-espace de E stable par u. On se donne $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de F. D'après le théorème de la base incomplète, on peut compléter $(e_1, \ldots, e_p)$ en une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E au moyen d'éléments de B.

On pose alors $G = \mathrm{Vect}(e_{p+1}, \ldots, e_n)$, et on a $F \oplus G = E$. De plus, comme $e_{p+1}, \ldots, e_n$ sont des éléments de B, ce sont des vecteurs propres de u. Notons $\lambda_{p+1}, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres associées.

Si $x \in G$, on a $(\mu_{p+1}, \ldots, \mu_n) \in \mathbb{K}^{n-p}$ tel que $x = \sum\limits_{i=p+1}^{n} \mu_i\, e_i$ et

$$u(x) = \sum_{i=p+1}^{n} \mu_i\, u(e_i) = \sum_{i=p+1}^{n} \mu_i\, \lambda_i e_i \in G$$

donc G est stable par u.

Il faut bien se souvenir qu'on peut choisir où prendre les vecteurs avec lesquels on complète une base, dans le théorème de la base incomplète.

► Sens réciproque

Pour le sens réciproque, on commence par constater que u admet une valeur propre et un vecteur propre associé (puisqu'on est dans $\mathbb{C}$). On applique alors l'hypothèse à $F = \mathbb{C}\,x$, ce qui donnera un sous-espace stable G. La stabilité permet de considérer l'endomorphisme induit par u sur G, et on réitère le raisonnement.

Supposons que tout sous-espace stable par u admette un supplémentaire stable par u. Montrons que u est diagonalisable par récurrence sur la dimension de E.

- Si E est de dimension 1, il est clair que u est diagonalisable.
- On suppose désormais le résultat acquis pour $n-1$ ($n \in \mathbb{N}^*$). Dans $\mathbb{C}[X]$, le polynôme caractéristique de u est scindé, donc u admet au moins une valeur propre λ et un vecteur propre x associé. Posons $F = \mathbb{C}\,x$, F est stable par u. Par hypothèse, on a donc G un supplémentaire de F stable par u, qui vérifie $\dim(G) = n-1$.

  Soit v l'endomorphisme induit par u sur G. Si F_1 est un sous-espace de G stable par v, il est stable par u, donc on a H un supplémentaire de F_1 dans E stable par u. Par suite, $G_1 = H \cap G$ est un supplémentaire de F_1 dans G, stable par u (donc par v). Ainsi v vérifie la même hypothèse que u, et par hypothèse de récurrence, v est diagonalisable.

  On ajoute x à une base de G de vecteurs propres de v pour obtenir une base de E de vecteurs propres de u. Ainsi u est diagonalisable.

Exercice 2.12 : Une caractérisation des endomorphismes nilpotents

Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$.
1. Montrer que si f est nilpotent, pour tout $k \in \{1,\ldots,n\}$, $\mathrm{tr}(f^k) = 0$.
Réciproquement, on suppose que pour tout $k \in \{1,\ldots,n\}$, $\mathrm{tr}(f^k) = 0$. On note $\lambda_1,\ldots,\lambda_p$ les valeurs propres disctintes de f, de multiplicités $m_1,\ldots,m_p$.
2. Montrer que pour tout $i \in \{1,\ldots,n\}$, $\sum\limits_{k=1}^{p} m_k\,\lambda_k^i = 0$.
3. En déduire que f est nilpotent.

1. Si f est nilpotent, il est trigonalisable de valeur propre nulle. On calcule alors les traces demandées dans une base de trigonalisation.

Comme f est nilpotent, il est trigonalisable et sa seule valeur propre est 0. On a donc B une base de E dans laquelle la matrice T de f est triangulaire supérieure avec des 0 sur la diagonale.
Pour $k \in \{1,\ldots,n\}$, T^k est donc triangulaire supérieure, avec des 0 sur la diagonale, et $\mathrm{tr}(f^k) = \mathrm{tr}(T^k) = 0$.

2. Là encore, le calcul des traces s'effectue facilement dans une base de trigonalisation (possible puisqu'on est dans $\mathbb{C}$).

Dans $\mathbb{C}[X]$, le polynôme caractéristique de f est scindé, donc f est trigonalisable. On a donc une base B de E dans laquelle la matrice T de f est triangulaire supérieure, avec pour coefficients diagonaux, m_1 fois $\lambda_1,\ldots,m_p$ fois λ_p. Pour

$k \in \{1, \ldots, n\}$, T^k est encore triangulaire supérieure, avec pour coefficients diagonaux, m_1 fois $\lambda_1^k, \ldots, m_p$ fois λ_p^k. Ainsi :

$$\sum_{i=1}^{p} m_i \, \lambda_i^k = \mathrm{tr}(T^k) = \mathrm{tr}(f^k) = 0.$$

Il faut toujours penser à trigonaliser lorsqu'on souhaite faire le lien entre les valeurs propres de f et celles d'un polynôme en f.

3. Pour montrer que f est nilpotent, il faut montrer que sa seule valeur propre est 0. On suppose donc (par l'absurde) que f a plus de deux valeurs propres. La question précédente donne alors un système de n équations à p inconnues, qui rappelle un Vandermonde.

Si $p = 1$, alors $m_1 = n$ et $n \, \lambda_1 = 0$ donne $\lambda_1 = 0$. Ainsi la seule valeur propre de f est 0, donc son polynôme caractéristique est X^n, donc par le théorème de Cayley-Hamilton, $f^n = 0$ et f est nilpotent.
Supposons maintenant $p > 1$. Si 0 est une des valeurs propres de f, quitte à les échanger, on suppose $\lambda_p = 0$. On obtient alors

$$\sum_{i=1}^{p-1} m_i \, \lambda_i^k = 0 \text{ pour tout } k \in \{1, \ldots, n\}.$$

Quitte à diminuer p de 1, on peut supposer que toutes les valeurs propres de f sont non nulles. Les p équations

$$\sum_{i=1}^{p} m_i \, \lambda_i^k = 0 \text{ en prenant } k \text{ entre 1 et } p$$

forment alors un système de p équations à p inconnues $(m_1, \ldots, m_p)$, dont la matrice associée est

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \ldots & \lambda_p \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^p & \ldots & \lambda_p^p \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est inversible : on reconnait un déterminant de Vandermonde, une fois que $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$, non nuls, sont mis en facteurs, et les λ_i sont deux à deux distincts.
Ainsi le système a une unique solution. Comme $(0, \ldots, 0)$ est solution, c'est la solution nulle et $m_1 = \ldots = m_p = 0$. Absurde, puisque les m_i sont tous non nuls ! Ainsi $p = 1$ et comme vu plus haut, f est nilpotent.

Exercice 2.13 : Décomposition de Dunford

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle p et f un endomorphisme de E. On note P le polynôme caractéristique de f et on suppose qu'il est scindé : $P = (X - \lambda_1)^{n_1} \cdots (X - \lambda_r)^{n_r}$ avec $r \in \mathbb{N}^*$, $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les racines distinctes de P de multiplicités respectives $n_1, \dots, n_r$.
1. Démontrer qu'il existe des sous-espaces $E_1, \dots, E_r$ de E stables par f, tels que pour tout k entre 1 et r, l'endomorphisme induit par f sur E_k soit somme d'une homothétie et d'un endomorphisme nilpotent.
2. Démontrer qu'il existe deux endomorphismes d et n de E, avec d diagonalisable et n nilpotent, tels que $f = d + n$ et $d \circ n = n \circ d$.
3. Application numérique : soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$f(x, y, z) = (-2z, x + 3z, y).$$

Déterminer les matrices de d et n dans la base canonique.

1. Cette décomposition de E a a été vue en cours. Il faut appliquer le lemme des noyaux à partir de la factorisation de P et les E_k sont les $\text{Ker}((f - \lambda_k \text{ Id})^{n_k})$ (sous-espaces caractéristique) .

Si $i \neq j$ sont entre 1 et r, les polynômes $(X - \lambda_i)^{n_i}$ et $(X - \lambda_j)^{n_j}$ sont premiers entre eux car ils n'ont aucun facteur irréductible en commun.
On a donc, d'après le lemme de décomposition des noyaux :

$$\text{Ker}(P(f)) = \bigoplus_{k=1}^{r} \text{Ker}((f - \lambda_k \text{ Id})^{n_k}) = \bigoplus_{k=1}^{r} E_k.$$

en posant $\text{Ker}((f - \lambda_k \text{ Id})^{n_k}) = E_k$ (stable par f puisque c'est le noyau d'un polynôme en f).
D'autre part, d'après le théorème de Cayley-Hamilton, $P(f) = 0$ et donc $\text{Ker}(P(f)) = E$, ainsi :

$$E = \bigoplus_{k=1}^{r} E_k.$$

Pour k entre 1 et r, notons f_k l'endomorphisme induit par f sur E_k. On a $(f_k - \lambda_k \text{ Id})^{n_k} = 0$, donc $f_k - \lambda_k \text{ Id}$ est nilpotent.
Ainsi f_k est la somme d'une homothétie et d'un endomorphisme nilpotent.

Il est important de savoir refaire ce raisonnement pour obtenir la décomposition de E en somme des sous-espaces caractéristiques.

2. Nous avons vu que la décomposition de E comme somme directe des sous-espaces E_k permettait de simplifier l'étude de f. L'idée est de commencer par montrer que la propriété est vérifiée par les f_k pour ensuite remonter à f.

Pour $k \in \{1, \ldots, r\}$, nous avons, d'après ce qui précède, que f_k est la somme de l'homothétie λ_k Id et de l'endomorphisme nilpotent $g_k = f_k - \lambda_k \operatorname{Id}$ de E_k. Dans une base $\mathscr{B}_k$ de E_k, on a donc (notant M_k la matrice de f_k et N_k celle de g_k) $M_k = \lambda \, \mathrm{I}_{n_k} + N_k$, avec $N_k^{n_k} = 0$.
La matrice M de f dans la base $\mathscr{B}$ obtenue en concaténant les base $\mathscr{B}_1, \ldots, \mathscr{B}_k$ est diagonale par blocs :

$$M = \begin{pmatrix} M_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & M_r \end{pmatrix}.$$

que l'on peut écrire sous forme d'une somme :

$$M = \begin{pmatrix} \lambda_1 \, \mathrm{I}_{n_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_r \, \mathrm{I}_{n_r} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} N_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & N_r \end{pmatrix} = D + N.$$

Notons que D est diagonale. N est nilpotente car elle est diagonale par blocs avec des blocs diagonaux eux-mêmes nilpotents. Il restera ensuite à vérifier que D et N commutent.

Vérifions que N est nilpotente et commute avec D.

- D et N commutent : en effectuant les produits par blocs,

$$\begin{aligned} DN &= \begin{pmatrix} \lambda_1 \mathrm{I}_{n_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_r \mathrm{I}_{n_r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & N_r \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 N_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_r N_r \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} N_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & N_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \mathrm{I}_{n_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_r \mathrm{I}_{n_r} \end{pmatrix} \\ &= ND. \end{aligned}$$

- N est nilpotente. En effet :

$$N^l = \begin{pmatrix} N_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & N_r \end{pmatrix}^l = \begin{pmatrix} N_1^l & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & N_r^l \end{pmatrix}.$$

On sait que $N_k^{n_k} = 0$; on a donc $N_k^l = 0$ pour tout entier $l \geqslant n_k$. En particulier, avec $l = \max(n_1, \dots, n_r)$, $N_k^l = 0$ pour tout k. Ainsi, $N^l = 0$, ce qui montre que N est nilpotente.

Enfin, nous pouvons revenir aux endomorphismes.

Soit d l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est D et n celui dont la matrice dans cette base est N.
Alors $f = d+n$, d est diagonalisable car sa matrice dans la base $\mathscr{B}$ est diagonale, n est nilpotent et $d \circ n = n \circ d$.

3. La méthode est expliquée dans les questions précédentes : nous allons commencer par déterminer les sous-espaces caractéristiques de f.

La matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Son polynôme caractéristique P vérifie alors :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad P(\lambda) = \det(\lambda \, \mathrm{I}_n - A)$$

et un calcul simple donne

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad P(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda + 2.$$

Pour trouver les racines de ce polynôme, cherchons des racines évidentes. On voit rapidement que $P(1) = 0$, ce qui permet une première factorisation : $P(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda - 2)$. Les racines du facteur de degré 2 sont 1 et -2 d'où la factorisation de P :

$$P = (X-1)^2(X+2).$$

Cherchons désormais des bases des sous-espaces caractéristiques. Nous savons d'après ce qui précède qu'en les concaténant nous obtiendrons une matrice « diagonale par blocs » qui nous permettra de trouver D et N.

Notons $E_1 = \mathrm{Ker}((f - \mathrm{Id})^2)$ et $E_2 = \mathrm{Ker}(f + 2\,\mathrm{Id})$ les sous-espaces caractéristiques de f.
D'une part,

$$(A - \mathrm{I}_3)^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 4 & -8 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Un vecteur $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ appartient donc au noyau de $(f - \mathrm{Id})^2$ si, et seulement si :

$$x - 2\,y + 4\,z = 0.$$

C'est l'équation d'un plan (de dimension 2), il suffit donc de trouver deux vecteurs non colinéaires dans ce plan pour en avoir une base.

Posons $u_1 = (2,1,0)$ et $u_2 = (0,2,1)$. On vérifie aisément que u_1 et u_2 sont deux éléments de $\mathrm{Ker}((f - \mathrm{Id})^2)$. De plus, ils ne sont pas colinéaires donc (u_1, u_2) est libre. Enfin, d'après les questions précédentes, $\mathrm{Ker}((f - \mathrm{Id})^2)$ est de dimension 2 donc (u_1, u_2) est une base de $\mathrm{Ker}((f - \mathrm{Id})^2)$.

Passons à l'autre sous-espace caractéristique. Nous savons qu'il est de dimension 1 et il suffit donc d'en trouver un élément non nul pour avoir une base.

D'autre part :

$$A + 2\,\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Les éléments (x, y, z) de $\mathrm{Ker}(f + 2\ \mathrm{Id})$ vérifient donc

$$\begin{cases} x = z \\ y = -2\,z \end{cases}.$$

En particulier, on voit que $(1, -2, 1) \in \mathrm{Ker}(f + 2\,\mathrm{Id})$. Comme ce noyau est de dimension 1, d'après les questions précédentes, la famille réduite au vecteur $u_3 = (1, -2, 1)$ en est une base.

Nous allons maintenant déterminer, comme nous l'avons fait précédemment dans le cas général, la matrice de f dans la base $\mathscr{B} = (u_1, u_2, u_3)$. Nous savons que nous aurons une matrice diagonale par blocs, le premier bloc étant d'ordre 2. Pour cela, on peut calculer les matrices de passage.

La matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à (u_1, u_2, u_3) est

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Son inverse est

$$P^{-1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 5 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix},$$

Le calcul de P^{-1}, non précisé ici, se fait par le pivot de Gauss.

La matrice de f dans (u_1, u_2, u_3) est donc

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Nous devons maintenant écrire cette matrice comme somme d'une matrice diagonale et d'une matrice nilpotente. Cependant, nous ne cherchons pas ces matrices au hasard : nous savons que la matrice diagonale doit être, d'après les questions précédentes, $\mathrm{diag}(1, 1, -2)$.

Nous avons donc, avec les notations précédentes :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad N = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ce sont les matrices de d et n respectivement dans la base (u_1, u_2, u_3). Il reste à effectuer un changement de base pour obtenir leurs matrices dans la base canonique, ce qui est ici demandé.

Toujours avec les notations précédentes, les matrices de d et n dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ sont respectivement

$$PDP^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 8 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad PNP^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

D'après ce qui précède, ces matrices commutent. On peut aisément le vérifier à la main pour s'assurer qu'il n'y a pas eu d'erreur dans les calculs. On peut également vérifier que leur somme est bien égale à A.

Exercice 2.14 : Théorème de Cayley-Hamilton

Le but de cet exercice est de démontrer le théorème de Cayley-Hamilton. Veillez donc à ne pas l'utiliser pour répondre aux questions!

1. Lemme : soient un entier $n \geqslant 2$ et $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$. Déterminer le polynôme caractéristique de la matrice

$$A(a_0, \ldots, a_{n-1}) = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & \ldots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle n et f un endomorphisme de E dont on notera P le polynôme caractéristique. On fixe un élément non nul x de E.

2. Démontrer qu'il existe un plus petit entier naturel p tel que la famille $(x, f(x), \ldots, f^p(x))$ est liée ; vérifier que $p \neq 0$.

3. Soit $F = \mathrm{Vect}(x, f(x), \ldots, f^{p-1}(x))$. Démontrer que F est stable par f et que la famille $\mathscr{B} = (x, f(x), \ldots, f^{p-1}(x))$ en est une base.

4. On note g l'endomorphisme de F induit par f. Quelle est la matrice de g dans $\mathscr{B}$?

5. Soit Q le polynôme caractéristique de g. Démontrer que $Q(g)(x) = 0$.

6. Montrer que Q divise P puis que $P(f)(x) = 0$. Conclure.

1. Commençons par traiter les petites valeurs de n pour voir si un schéma simple se dégage, ce qui permettrait une démonstration par récurrence.

- Si $n = 2$:
$$A(a_0, a_1) = \begin{pmatrix} 0 & a_0 \\ 1 & a_1 \end{pmatrix}$$
et P son polynôme caractéristique. Alors, pour tout scalaire x :
$$P(x) = \det \begin{pmatrix} x & -a_0 \\ -1 & x - a_1 \end{pmatrix} = x(x - a_1) - a_0 = x^2 - a_1\, x - a_0.$$
Ainsi, $P = X^2 - a_1\, X - a_0$.
- Si $n = 3$:
$$A(a_0, a_1, a_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & a_2 \end{pmatrix}$$
et P son polynôme caractéristique. Alors, pour tout scalaire x :
$$P(x) = \det \begin{pmatrix} x & 0 & -a_0 \\ -1 & x & -a_1 \\ 0 & -1 & x - a_2 \end{pmatrix}.$$
En développant selon la première colonne il vient
$$P(x) = x \det \begin{pmatrix} x & -a_1 \\ -1 & x - a_2 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 0 & -a_0 \\ -1 & x - a_2 \end{pmatrix}$$
soit
$$P(x) = x(x(x - a_2) - a_1) - a_0$$
et enfin $P(x) = x^3 - a_2\, x^2 - a_1\, x - a_0$. Ainsi, $P = X^3 - a_2\, X^2 - a_1\, X - a_0$.

Dans le cas général de l'énoncé, il est raisonnable de supposer que le polynôme caractéristique de $A(a_0, \ldots, a_{n-1})$ est $X^n - a_{n-1}X^{n-1} - \cdots - a_1X - a_0$.

Montrons par récurrence sur $n \geqslant 2$ la propriété H_n :
« Pour tout $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$, le polynôme caractéristique de la matrice $A(a_0, \ldots, a_{n-1})$ est $X^n - a_{n-1}\, X^{n-1} - \cdots - a_1\, X - a_0$. »

- H_2 est vraie comme vu plus haut.
- Soit un entier $n \geqslant 2$ tel que H_n. Considérons $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ et soit P le polynôme caractéristique de $A(a_0, \ldots, a_n)$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{K}$:
$$P(x) = \det(x\, \mathrm{I}_{n+1} - A(a_0, \ldots, a_n)) = \det \begin{pmatrix} x & \ldots & \ldots & 0 & -a_0 \\ -1 & \ddots & & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & x & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & -1 & x - a_n \end{pmatrix}.$$

En supprimant la première ligne et la première colonne de $x\,\mathrm{I}_{n+1} - A(a_0, \dots, a_n)$ on obtient la matrice $x\mathrm{I}_n - A(a_1, \dots, a_n)$.
En supprimant la première ligne et la dernière colonne de $x\,\mathrm{I}_{n+1} - A(a_0, \dots, a_n)$ on obtient une matrice triangulaire supérieure.
Ainsi, en développant le déterminant donnant $P(x)$ par rapport à la première ligne, on obtiendra deux déterminants d'ordre n aisés à calculer : le premier est donné par l'hypothèse de récurrence et le second est un déterminant triangulaire et donc simplement le produit des termes diagonaux.

Attention aux signes : d'une manière générale, quand on développe un déterminant par rapport à une ligne ou une colonne, le déterminant extrait obtenu en supprimant la ligne i et la colonne j est affecté du coefficient $(-1)^{i+j}$; ici, dans le cas de la première ligne et de la dernière colonne, $i = 1$ et $j = n + 1$, d'où la présence du coefficient $(-1)^{n+2}$.

En développant le déterminant selon la première ligne on obtient

$$P(x) = x\ \det(x\mathrm{I}_n - A(a_1, \dots, a_n)) + (-1)^{n+2}(-a_0)\ \det(T)$$

où T est la matrice obtenue en supprimant la première ligne et la dernière colonne de $x\,\mathrm{I}_{n+1} - A(a_0, \dots, a_{n-1})$.

- D'une part, $\det(x\,\mathrm{I}_n - A(a_1, \dots, a_n)) = x^n - a_n\,x^{n-1} - \dots - a_2\,x - a_1$ par hypothèse de récurrence.
- D'autre part, T est triangulaire supérieure à coefficients diagonaux tous égaux à -1, donc $\det(T) = (-1)^n$. Ainsi,

$$\begin{aligned} P(x) &= x(x^n - a_n\,x^{n-1} - \dots - a_2\,x - a_1) - a_0 \\ &= x^{n+1} - a_n\,x^n - \dots - a_1\,x - a_0. \end{aligned}$$

  Cette relation étant vraie pour tout $x \in \mathbb{K}$,

$$P = X^{n+1} - a_n\,X^n - \dots - a_1\,X - a_0.$$

Autrement dit, H_{n+1} est vraie, ce qui conclut la récurrence.

2. Pour démontrer qu'il existe un plus petit entier naturel possédant une propriété, il suffit de démontrer que l'ensemble des entiers naturels possédant cette propriété n'est pas vide : il possède alors un plus petit élément car toute partie non vide de $\mathbb{N}$ possède un minimum.
Dans le cas qui nous intéresse, il s'agit donc de démontrer qu'il existe au moins un entier naturel k tel que la famille $(x, f(x), \dots, f^k(x))$ est liée. Comme E est de dimension finie n, toute famille de cardinal $n + 1$ est liée, il suffit donc de prendre $k = n$.

Soit X l'ensemble des entiers naturels k tels que la famille $(x, f(x), \dots, f^k(x))$ est liée. Comme E est de dimension finie n, toute famille de cardinal $n + 1$ est liée, en particulier $(x, f(x), \dots, f^n(x))$ est liée. Ainsi, $n \in X$, donc $X \neq \varnothing$.

X est un sous-ensemble non vide de $\mathbb{N}$ donc possède un plus petit élément p. Ainsi, p est le plus petit entier naturel tel que $(x, f(x), \ldots, f^p(x))$ est liée. Supposons $p = 0$; la famille est alors réduite à (x). Cependant, $x \neq 0$, donc la famille (x) est libre ; ainsi, $p \neq 0$.

Remarquons dès à présent que la définition de p entraîne que toutes les familles $(x, f(x), \ldots, f^k(x))$, avec $k < p$, sont libres (et en particulier si $k = p - 1$, ce qui servira par la suite).

3. La définition de la famille $\mathscr{B}$ est bien cohérente car $p \in \mathbb{N}^*$: si p était nul, $f^{p-1}(x)$ n'aurait pas de sens en général ! C'est pour cela qu'il était demandé de vérifier $p \neq 0$. Comme F est, par définition, engendré par les vecteurs $f^k(x)$ avec $0 \leqslant k \leqslant p-1$, il suffit de démontrer que $f(f^k(x)) \in F$ pour tout ces entiers k.
C'est facile pour les premières valeurs de k, il restera à montrer que $f(f^{p-1}(x))$, c'est-à-dire $f^p(x)$, est élément de F, c'est-à-dire est combinaison linéaire des $f^k(x)$ avec $0 \leqslant k \leqslant p-1$.
Nous avons une propriété assez voisine de celle-ci : la famille $(x, f(x), \ldots, f^p(x))$ étant liée, et $(x, f(x), \ldots, f^{p-1}(x))$ étant libre, on peut écrire $f^p(x)$ comme combinaison linéaire des autres $f^k(x)$.

Pour $0 \leqslant k \leqslant p-2$, on a $f(f^k(x)) = f^{k+1}(x) \in F$ car alors $k+1 \leqslant p-1$.
Par définition de p $(x, f(x), \ldots, f^p(x))$ est liée et $(x, f(x), \ldots, f^{p-1}(x))$ est libre. $f^p(x)$ s'écrit donc comme combinaison linéaire de $x, f(x), \ldots, f^{p-1}(x)$: on a $(\lambda_0, \ldots, \lambda_{p-1}) \in \mathbb{K}^p$ tel que.

$$f^p(x) = \sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k\, f^k(x) \in F.$$

En conséquence, $f(f^{p-1}(x)) \in F$: F est donc stable par f.
Enfin, par définition, $\mathscr{B}$ est une famille génératrice de F. De plus, nous avons vu que cette famille est libre, c'est donc une base de F.

4. Pour plus de clarté notons, pour $0 \leqslant k \leqslant p-1$, $e_k = f^k(x)$.
g étant induit par f on a, par définition, $g(y) = f(y)$ pour tout élément y de F. En particulier, $g(e_k) = f(f^k(x)) = f^{k+1}(x)$. Si $k+1 \leqslant p-1$, ce dernier vecteur n'est autre que e_{k+1}. Le cas de $g(e_{p-1})$ devra être traité séparément.

Si $0 \leqslant k \leqslant p-2$, $k+1 \leqslant p-1$ et on a donc $g(e_k) = e_{k+1}$.
Pour $k = p-1$, on a $g(e_{p-1}) = f^p(x)$. Nous avons vu précédemment que $f^p(x)$ est combinaison linéaire de $\mathscr{B}$; il existe donc des scalaires $a_0, \ldots, a_{p-1}$ tels que

$$f^p(x) = \sum_{k=0}^{p-1} a_k f^k(x) = \sum_{k=0}^{p-1} a_k e_k.$$

La matrice de g dans la base $\mathscr{B}$ est donc :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a_{p-1} \end{pmatrix} = A(a_0, \dots, a_{p-1}).$$

5. Vu la forme de la matrice de g dans $\mathscr{B}$, le lemme de la première question s'applique. Le résultat en découle immédiatement.

D'après le lemme, $Q = X^p - a_{p-1}\,X^{p-1} - \dots - a_1\,X - a_0$. On a donc

$$Q(g) = g^p - \sum_{k=0}^{p-1} a_k\, g^k$$

et enfin :

$$Q(g)(x) = g^p(x) - \sum_{k=0}^{p-1} a_k\, g^k(x).$$

Par définition des scalaire a_k on a :

$$f^p(x) = \sum_{k=0}^{p-1} a_k\, f^k(x)$$

soit, vu que $g(y) = f(y)$ pour tout $y \in F$:

$$g^p(x) = \sum_{k=0}^{p-1} a_k\, g^k(x)$$

ce qui donne enfin

$$Q(g)(x) = 0.$$

Nous pouvons remarquer que l'on a en fait $Q(g) = 0$. En effet, comme $Q(g)$ est un polynôme en g, $Q(g)$ et g commutent. On a donc

$$Q(g)(g^k(x)) = g^k(Q(g(x))) = g^k(0) = 0$$

pour tout entier naturel k. Par ailleurs, g étant induit par f, $g^k(x) = f^k(x)$. Ainsi, $Q(g)$ est nul sur tous les vecteurs de $\mathscr{B}$ et donc sur F. Nous avons donc démontré le théorème de Cayley-Hamilton pour g, c'est-à-dire dans le cas particulier des endomorphismes dont la matrice dans une certaine base est de la forme du lemme.

6. Le calcul du polynôme caractéristique peut se faire à partir de la matrice de l'endomorphisme dans n'importe quelle base. Pour trouver une relation entre P et Q, on peut donc d'abord chercher une relation entre les matrices de g et f dans des bases de F et E bien choisies.
Afin d'exploiter le fait que F est stable par f et que g est l'endomorphisme de F induit par f, on peut considérer la matrice de f dans une base de E obtenue en complétant

une base de F. En effet, dans une telle base, la matrice de f est constituée de quatre blocs et le bloc en deuxième ligne et première colonne est nul. Ceci permet de calculer les déterminants, et donc les polynômes caractéristiques, simplement.

Comme toujours, quand on veut compléter une base d'un espace vectoriel de dimension finie, il faut traiter à part un cas particulier. En effet, si F est égal à E, $\mathscr{B}$ est elle-même une base de E et il n'y a rien à compléter : dans ce cas, on a simplement $g = f$ et donc $Q = P$. De façon analogue, avant d'introduire une base d'un espace vectoriel, on doit toujours vérifier qu'il n'est pas réduit à 0.

Distinguons deux cas.

- Supposons $p = n$: alors $F = E$ et donc, comme $g(y) = f(y)$ pour tout $y \in F$, on a $g = f$ et enfin $Q = P$, donc Q divise P.
- Supposons $p < n$.

  Complétons $\mathscr{B}$ en une base $\mathscr{C}$ de E. Alors la matrice de f dans la base $\mathscr{C}$ est de la forme
  $$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$
  avec $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g) \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$, $B \in \mathscr{M}_{p,n-p}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathscr{M}_{n-p}(\mathbb{K})$.

  Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ on a donc :
  $$\lambda\, \mathrm{I}_n - \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\, \mathrm{I}_p - A & -B \\ 0 & \lambda\, \mathrm{I}_{n-p} - C \end{pmatrix}$$
  donc $P(\lambda) = Q(\lambda)\, \det(\lambda\, \mathrm{I}_{n-p} - C) = Q(\lambda)\, R(\lambda)$, avec R le polynôme caractéristique de C.

  Ceci étant vrai pour tout scalaire λ on a l'égalité
  $$P = QR$$
  donc Q divise P.

Le produit des polynômes se traduit par la composition des endomorphismes. Ceci permet de faire le lien entre $P(f)$ et $Q(f)$, et donc $Q(g)$.

La relation $P = QR$ donne $P(f) = Q(f) \circ R(f) = R(f) \circ Q(f)$.
Ainsi : $P(f)(x) = Q(f)(R(f)(x)) = R(f)(Q(f)(x))$.
Comme g est induit par f on a, pour tout élément y de F, $Q(g)(y) = Q(f)(y)$; en particulier, $Q(f)(x) = Q(g)(x) = 0$.
Il vient enfin :
$$P(f)(x) = R(f)(Q(f)(x)) = R(f)(0) = 0.$$

Le but de l'exercice est de démontrer que $P(f) = 0$, c'est-à-dire que l'égalité ci-dessus est vérifiée pour tous les vecteurs x de E. Ceci est presque le cas : nous l'avons vérifié pour un vecteur non nul quelconque, il reste à voir que c'est encore vrai pour $x = 0$, ce qui est clair par linéarité.

Nous avons donc démontré que, pour tout élément non nul x de E, $P(f)(x) = 0$. Par ailleurs, $P(f)$ est linéaire, donc $P(f)(0) = 0$. Ainsi, $P(f)(x) = 0$ pour tout élément x de E. Ceci montre que $P(f) = 0$, c'est-à-dire que P, le polynôme caractéristique de f, est un polynôme annulateur de f : c'est le théorème de Cayley-Hamilton.

CHAPITRE

3

Espaces euclidiens

Exercice 3.1 : Famille de polynômes orthogonaux

Sur $E = \mathbb{R}[X]$, on définit un produit scalaire en posant, pour P et $Q \in \mathbb{R}[X]$,

$$\langle P|Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Justifier que $\langle\ |\ \rangle$ définit bien un produit scalaire sur E.
2. Montrer qu'il existe une unique suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}[X]^{\mathbb{N}}$ orthogonale telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\deg(P_n) = n$ et P_n a pour coefficient dominant 1.
3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $R \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, justifier que $\displaystyle\int_{-1}^{1} P_n(t)R(t)\,\mathrm{d}t = 0$.
4. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n est scindé à racines simples et que celles-ci sont dans $[-1, 1]$.
On pourra construire un polynôme R de degré au plus $n-1$ tel que P_nR soit de signe constant sur $[-1, 1]$.

1. Il faut tout simplement vérifier les trois axiomes de la définition.

Montrons que $\langle\ |\ \rangle$ est un produit scalaire :

- Soit $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$, on a

$$\langle P|Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} Q(t)P(t)\,\mathrm{d}t = \langle Q|P\rangle\,,$$

donc $\langle\ |\ \rangle$ est symétrique.

- Soient $(P, Q, R) \in \mathbb{R}[X]^3$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\begin{aligned}\langle \lambda P + \mu Q|R\rangle &= \int_{-1}^{1} (\lambda P(t) + \mu Q(t))R(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \lambda \int_{-1}^{1} P(t)R(t)\,\mathrm{d}t + \mu \int_{-1}^{1} Q(t)R(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \lambda\,\langle P|R\rangle + \mu\,\langle Q|R\rangle\,.\end{aligned}$$

Ainsi $\langle\ |\ \rangle$ est linéaire à droite, puis bilinéaire (grâce à la symétrie).

- $\langle\ |\ \rangle$ est positif par positivité de l'intégrale.

  Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\langle P|P\rangle = 0$. Alors $\displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)^2\,\mathrm{d}t = 0$. Comme la fonction $t \mapsto P(t)^2$ est positive et continue (car polynomiale), elle est constante nulle, donc $P(t)^2 = 0$ pour tout $t \in [-1, 1]$, puis $P(t) = 0$. P admet donc une infinité de racines, donc $P = 0$.

Ainsi $\langle\ |\ \rangle$ est défini-positif. C'est donc bien un produit scalaire.

On peut se permettre de passer très vite sur les deux premiers points, mais il faut toujours prouver proprement le caractère défini-positif, qui nécessite généralement des théorèmes un peu plus évolués.

2. Le résultat demandé ressemble au procédé d'othonormalisation de Gram-Schmidt, avec des polynômes de coefficient dominant 1 au lieu de norme 1. On adapte donc la preuve de ce procédé (qu'il faut bien connaître) à ce cas particulier.

On pourrait appliquer le procédé d'orthonormalisation démontré dans le cours pour obtenir l'existence, mais pas l'unicité.

Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathscr{P}(n)$: « $\exists!(P_0, \dots, P_n)$ orthogonale, $\forall k \in \{0, \dots, n\}$, $\deg(P_k) = k$ et P_k est de coefficient dominant 1. »

- Il existe un unique polynôme de degré 0 et de coefficient dominant 1, c'est $P_0 = 1$. On a donc $\mathscr{P}(0)$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}(n)$. On a, par hypothèse de récurrence, l'existence et l'unicité de $(P_0, \dots, P_n)$. Il reste donc à montrer l'existence et l'unicité de P_{n+1}. Pour ce faire, on raisonne par analyse/synthèse.

▶ **Analyse :**
On suppose avoir P_{n+1} qui convient, il doit alors être orthogonal à $P_0, \dots, P_n$, donc à tous les polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$. On peut donc exprimer P_{n+1} via la projection orthogonale : il est de la forme $Q - p_n(Q)$, où p_n est la projection sur $\mathbb{R}_n[X]$.
Comme P_{n+1} doit être unitaire et de degré $n+1$, on doit donc avoir $Q = X^{n+1}$.

Supposons avoir $P_{n+1} \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n+1$, de coefficient dominant 1, et orthogonal à $(P_0, \dots, P_n)$. Comme $(P_0, \dots, P_n)$ est échelonnée en degrés, elle est libre. Elle contient $n + 1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$ éléments, c'est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Ainsi P_{n+1} est orthogonal aux éléments d'une base de $\mathbb{R}_n[X]$, donc à $\mathbb{R}_n[X]$. Comme il est de la forme $X^{n+1}+Q$, avec $Q \in \mathbb{R}_n[X]$, on a $Q = -p_n(X^{n+1})$, où p_n désigne la projection orthogonale sur $\mathbb{R}_n[X]$ (puisque $-Q$ est dans $\mathbb{R}_n[X]$ et vérifie $X^{n+1}-(-Q) = P$ orthogonal à $\mathbb{R}_n[X]$).
On a donc $P_{n+1} = X^{n+1} - p_n(X^{n+1})$ et on a l'unicité.

► **Synthèse :**
On pose ici le résultat trouvé dans l'analyse. Il ne faut cependant pas oublier de vérifier qu'il est bien unitaire, de degré $n+1$ et orthogonal à $P_0, \dots, P_n$.

Posons $P_{n+1} = X^{n+1} - p_n(X^{n+1})$. Alors comme $p_n(X^{n+1})$ est dans $\mathbb{R}_n[X]$ (donc de degré $\leqslant n$), P_{n+1} est de degré $n+1$ et de coefficient dominant 1. D'autre part P_{n+1} est orthogonal à $\mathbb{R}_n[X]$ par définition du projeté orthogonal, donc à $(P_0, \dots, P_n)$. On a donc l'existence, ce qui termine de montrer $\mathscr{P}(n+1)$.
En conclusion, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$, ce qui donne l'existence et l'unicité de la suite cherchée.

3. La relation à démontrer se réécrit $\langle P_n | R \rangle = 0$. Il faut donc montrer que P_n est orthogonal à R, ce qu'on a déjà fait dans la question précédente.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a vu dans la question précédente que P_n est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, donc à R. Ainsi

$$0 = \langle P_n | R \rangle = \int_{-1}^{1} P_n(t) R(t) \,\mathrm{d}t.$$

4. On suit l'indication donnée : pour construire un polynôme R tel que $P_n R$ soit de signe constant sur $[-1,1]$, il faut que R change de signe en même temps que P. Il faut donc considérer les points a_i de $[-1,1]$ où P s'annule en changeant de signe. Le polynôme donné par le produit des $X - a_i$ s'annule en changeant de signe en même temps que P, ce qui implique que PR est de signe constant.

Notons $a_1 < \cdots < a_k$ les points de $[-1,1]$ où P_n s'annule en changeant de signe (avec $k=0$ si P_n ne s'annule pas en changeant de signe sur $[-1,1]$).
Posons alors

$$R = \prod_{i=1}^{k} (X - a_i) \text{ avec } R = 1 \text{ si } k = 0.$$

Comme R s'annule en changeant de signe aux a_i, $P_n R$ est de signe constant sur $[-1,1]$.

Supposons $k \leqslant n-1$. Alors $R \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, donc $\displaystyle\int_{-1}^{1} P_n(t)R(t)\,\mathrm{d}t = 0$ d'après la question précédente. Mais $t \mapsto P_n(t)R(t)$ est continue et de signe constant sur $[-1,1]$, donc pour tout $t \in [-1,1]$, $P_n(t)R(t) = 0$, puis $P_n R$ admet une infinité de racines, donc $P_n R = 0$. Comme $R \neq 0$ et $P_n \neq 0$, c'est absurde !
Ainsi $k \geqslant n$ et puisque P_n admet au plus n racines (car il est de degré n), on a $k = n$ et P_n est scindé, à racines simples, sur $[-1,1]$.

Exercice 3.2 : Une série de Fourier

On considère E l'ensemble des fonctions f continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, 2π-périodiques et paires.
On munit E du produit scalaire définit par :

$$\langle f|g\rangle = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $c_n : x \mapsto \sqrt{2}\cos(nx)$ si $n \geqslant 1$, $c_0 : x \mapsto 1$.
1. Montrer que $\langle\ |\ \rangle$ définit un produit scalaire sur E.
2. Montrer que la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthonormale.
3. Si $f \in E$ et $\varepsilon > 0$, montrer qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$\forall x \in [0,\pi], \quad |f(x) - P(\cos x)| \leqslant \varepsilon.$$

4. En déduire que la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est totale.
Pour $n \in \mathbb{N}$ et $f \in E$, on note $a_n(f) = \langle c_n|f\rangle$ puis $S_n(f) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k(f)c_k$.
5. Montrer que $(S_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f pour la norme associée à $\langle\ |\ \rangle$.
6. On suppose que $\sum a_k$ converge absolument. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(f)c_n(x).$$

1. Comme souvent, il faut surtout faire attention au caractère défini-positif.

$\langle\ |\ \rangle$ est clairement bilinéaire (par linéarité de l'intégrale) et symétrique. Si $f \in E$, on a $\langle f|f\rangle \geqslant 0$ par positivité de l'intégrale.
Supposons $\langle f|f\rangle = 0$. La fonction f^2 est positive et continue sur $[0,\pi]$, donc est nulle sur ce segment. Pour $t \in [0,\pi]$, on donc $f(t) = 0$. Par parité, f est alors nulle sur $[-\pi,\pi]$, puis sur $\mathbb{R}$ par périodicité. Ainsi $f = 0$.
En conclusion $\langle\ |\ \rangle$ définit un produit scalaire sur E.

2. Il suffit de calculer les $\langle c_n|c_m\rangle$ pour n et $m \in \mathbb{N}$. La seule difficulté (outre la connaissance des formules de trigonométrie !) est de bien distinguer les cas où m ou n est nul.

La définition de c_n change suivant le fait que n soit nul ou non. Pour étudier $\langle c_n|c_m\rangle$, il faut distinguer les cas n ou $m = 0$. Attention également à distinguer le cas $n \neq m$ qui apparait lors de l'intégration de $\cos((n-m)t)$.

Soient $(n,m) \in \mathbb{N}^2$, on distingue plusieurs cas :

- Si $n = m = 0$, on a immédiatement $\langle c_n | c_m \rangle = 1$.
- Si $n \neq 0$ et $m = 0$ (ou l'inverse, puisque $\langle \ | \ \rangle$ est symétrique), on a :

$$\langle c_n | c_m \rangle = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^\pi \cos(nt)\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{2}}{n\pi} \Big[\sin(nt)\Big]_0^\pi = 0.$$

- Si n et $m \neq 0$, avec $m \neq n$, alors :

$$\begin{aligned}\langle c_n | c_m \rangle &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos(nt)\cos(mt)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\cos((n+m)t) + \cos((n-m)t))\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{n+m}\sin((n+m)t) + \frac{1}{n-m}\sin((n-m)t)\right]_0^\pi = 0\end{aligned}$$

- Enin, si $n = m \neq 0$, on a :

$$\begin{aligned}\langle c_n | c_m \rangle &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos^2(nt)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (1 + \cos(2nt))\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\pi} \left[t + \frac{1}{2n}\sin(2nt)\right]_0^\pi = 1.\end{aligned}$$

Dans tous les cas, il vient $\langle c_n | c_m \rangle = 0$ si $n \neq m$, 1 si $n = m$, donc $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est orthonormale.

3. En posant $y = \cos(x)$, il faut donc approximer uniformément la fonction donnée par $g(y) = f(\arccos(y))$ par un polynôme P sur $[0,1]$. Ceci vient directement du théorème de Weierstrass

Soit $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, $y \mapsto f(\arccos(y))$. g est continue sur $[0,1]$ comme composée de fonctions qui le sont. Par le théorème de Weierstrass, on a donc $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$\forall y \in [0,1]\ ,\ |g(y) - P(y)| \leqslant \varepsilon.$$

Pour $x \in [0,\pi]$, on a alors $y = \cos x \in [0,1]$ donc

$$|f(x) - P(\cos(x))| = |g(\cos(x)) - P(\cos(x))| \leqslant \varepsilon.$$

4. Il faut montrer que seule la fonction nulle est orthogonale à tous les c_n. Soit f une telle fonction. Pour exploiter la question précédente, on veut montrer f est orthogonale à tous les $P(\cos(x))$, donc à tous les $x \mapsto \cos^n(x)$. On pense alors à la linéarisation, qui permet d'exprimer les $\cos^n(x)$ comme combinaison linéaire de $\cos(kx)$
Ensuite, si f est orthogonale à tous les $P(\cos x)$, $P \in \mathbb{R}[X]$, comme on dispose d'une suite de ces fonctions qui converge uniformément vers f par la question précédente, on montre que f est orthogonale à elle-même.

Soit $f \in E$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\langle f|c_n\rangle = 0$. Pour $n \in \mathbb{N}$, et $x \in \mathbb{R}$, la linéarisation de $\cos^n(x)$ donne (par la formule d'Euler et du binôme de Newton) :

$$\begin{aligned}
\cos^n(x) &= \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{ikx}e^{-i(n-k)x} \\
&= \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{i(2k-n)x} \\
&= \frac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{i(2k-n)x} + \frac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{i(2k-n)x} \\
&= \frac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{i(2k-n)x} + \frac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{n-k}e^{i(n-2k)x} \\
&= \frac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(e^{i(2k-n)x} + e^{i(n-2k)x}) \\
&= \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos((n-2k)x)
\end{aligned}$$

Ainsi $x \mapsto \cos^n x$ est combinaison linéaire de fonctions de la forme c_{n-2k} (ou c_{2k-n} par parité de cosinus), donc est orthogonale à f. f est donc orthogonale à toutes les fonctions du type $x \mapsto P(\cos x)$, $P \in \mathbb{R}[X]$.
D'après la question précédente, on a $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}[X]^{\mathbb{N}}$ telle que $(P_n(\cos(x)))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[0,\pi]$. Comme la convergence est uniforme, on a alors :

$$0 = \langle f|P_n(\cos(.))\rangle = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)P_n(\cos(t))\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)^2\,\mathrm{d}t.$$

Par unicité de la limite, on a donc $\displaystyle\int_0^{\pi} f(t)^2\,\mathrm{d}t = 0$. Ainsi $\langle f|f\rangle = 0$ et f est nulle.

5. On constate que $S_n(f)$ est le projeté orthogonal de f sur $\mathrm{Vect}(c_0,\ldots,c_n)$. La suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthonormale totale, donc $(S_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f pour la norme euclidienne associée à $\langle\ |\ \rangle$ de E.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$S_n(f) = \sum_{k=0}^{n} a_k(f)c_k = \sum_{k=0}^{n}\langle f|c_k\rangle\, c_k,$$

donc $S_n(f)$ est le projeté orthogonal de f sur $\mathrm{Vect}(c_0,\ldots,c_n)$.
La suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant orthonormale et totale, $(S_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f pour la norme euclidienne associée à $\langle\ |\ \rangle$ de E.

6. Comme $\sum |a_n(f)|$ converge, on peut définir la fonction $g : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(f)c_n(x)$. On montre facilement que cette suite de fonctions converge normalement sur $\mathbb{R}$.

Pour montrer que $g = f$, il suffit de montrer que $g - f$ est orhogonal à tous les c_n, c'est-à-dire que $\langle c_n | g \rangle = \langle c_n | f \rangle$ i.e. $a_n(f) = a_n(g)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour ceci, on utilise le théorème d'inversion série et intégrale, grâce à la convergence normale.

Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$|a_n(f)c_n(x)| \leqslant \sqrt{2}\,|a_n(f)|\,|\cos(nx)| \leqslant \sqrt{2}\,|a_n(f)|,$$

qui reste vraie si $n = 0$. Ainsi la série de fonction $g = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(f)c_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.
Pour $p \in \mathbb{N}$, on a

$$a_p(g) = \langle g | c_p \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi g(t)c_p(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(f)c_n(t)c_p(t)\,\mathrm{d}t.$$

Comme la série définissant g converge normalement sur $\mathbb{R}$, elle converge normalement, donc uniformément sur $[0, \pi]$. On peut donc intervertir somme et intégrale (puisque les $t \mapsto a_n c_n(t) c_p(t)$ sont toutes continues) et :

$$a_p(g) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(f) \int_0^\pi c_n(t)c_p(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(f)\,\langle c_n | c_p \rangle = a_p(f)$$

puisque la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthonormale.
Ainsi, pour $p \in \mathbb{N}$, $\langle f - g | c_p \rangle = \langle f | c_p \rangle - \langle g | c_p \rangle = a_p(f) - a_p(g) = 0$. $f - g$ est donc orthogonal à tous les éléments de la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, qui est totale, donc $f - g = 0$. Ainsi, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(f)c_n(x).$$

Exercice 3.3 : Un problème de minimisation

Déterminer la valeur de

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 (t^2 - at - b)^2 dt$$

et préciser pour quelles valeurs de a et b elle est atteinte.

Il s'agit de déterminer la borne inférieure d'une intégrale dépendant de deux paramètres a et b. Le carré permet de réinterpréter cette intégrale comme étant la norme au carré de $X^2 - aX - b$, en définissant un produit scalaire intégral sur $\mathbb{R}[X]$.
Quand (a, b) décrit $\mathbb{R}^2$, $aX + b$ décrit $\mathbb{R}_1[X]$. La borne inférieure cherchée est donc $d(X^2, \mathbb{R}_1[X])^2$. Cette distance se calcule au moyen du projeté orthogonal sur $\mathbb{R}_1[X]$. Ce projeté orthogonal se trouve en prenant une base orthonormée de $\mathbb{R}_1[X]$, que l'on obtient en orthonormalisant $(1, X)$.

Pour $(P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2$, on pose

$$\langle P|Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)dt.$$

On montre comme dans l'exercice précédent que $\langle \ | \ \rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
Appliquons le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt pour transformer $(1,X)$ en une base orthonormée (P_0,P_1) de $\mathbb{R}_1[X]$.
On pose $P_0 = \dfrac{1}{\|1\|} = 1$.
Notons p_0 la projection orthogonale sur $\mathbb{R}_0[X]$, on pose alors

$$P_1 = \frac{X - p_0(X)}{\|X - p_0(X)\|}.$$

Or $p_0(X) = \langle X|P_0\rangle\, P_0 = \displaystyle\int_0^1 t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$ et

$$\begin{aligned}\|X - \frac{1}{2}\|^2 &= \int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 dt = \int_0^1 \left(t^2 - t + \frac{1}{4}\right) dt\\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.\end{aligned}$$

Ainsi $P_1 = \sqrt{12}\left(X - \frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{3}X - \sqrt{3}$.
On a alors

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 (t^2 - at - b)^2 dt = \inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \|X^2 - aX - b\|^2 = d(X^2, \mathbb{R}_1[X])^2.$$

Notant p_1 la projection orthogonale sur $\mathbb{R}_1[X]$, on a

$$d(X^2, \mathbb{R}_1[X]) = \|X^2 - p_1(X^2)\|.$$

Avec la base orthonormée calculée plus haut, il vient

$$\begin{aligned}p_1(X^2) &= \left\langle X^2 \middle| P_0 \right\rangle P_0 + \left\langle X^2 \middle| P_1\right\rangle P_1\\ &= \int_0^1 t^2 dt + 2\sqrt{3}\int_0^1 t^2(2\sqrt{3}t - \sqrt{3})dt \left(X - \frac{1}{2}\right)\\ &= \frac{1}{3} + 12\int_0^1 \left(t^3 - \frac{t^2}{2}\right) dt \left(X - \frac{1}{2}\right)\\ &= \frac{1}{3} + 12\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right)\left(X - \frac{1}{2}\right)\\ &= \frac{1}{3} + X - \frac{1}{2} = X - \frac{1}{6}\end{aligned}$$

Il est important de savoir appliquer le procédé d'orthonormalisation, soit en apprenant les formules par cœur, soit en sachant les retrouver très vite.

Ainsi

$$\begin{aligned}
d(X^2, R_1[X])^2 = \|X^2 - p_1(X^2)\|^2 &= \int_0^1 \left(t^2 - t + \frac{1}{6}\right)^2 dt \\
&= \int_0^1 \left(t^4 + t^2 + \frac{1}{36} - 2t^3 + \frac{t^2}{3} - \frac{t}{3}\right)^2 dt \\
&= \frac{1}{5} + \frac{1}{3} + \frac{1}{36} - \frac{1}{2} + \frac{1}{9} - \frac{1}{6} \\
&= \frac{36 + 60 + 5 - 90 + 20 - 30}{180} = \frac{1}{180}.
\end{aligned}$$

En conclusion, on a donc :

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 (t^2 - at - b)^2 dt = \frac{1}{180},$$

et cet inf est atteint pour $a = 1$ et $b = -\dfrac{1}{6}$.

Exercice 3.4 : Isométries matricielles

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Pour $(A, B) \in E^2$, on pose $\langle A|B\rangle = \mathrm{tr}({}^tAB)$.
1. Montrer que $\langle\ |\ \rangle$ définit un produit scalaire sur E.
2. Donner une CNS sur $B \in E$ pour que $f : A \mapsto AB$ soit un automorphisme orthogonal de E.
3. Donner une CNS sur $B \in GL_n(\mathbb{R})$ pour que $f : A \mapsto B^{-1}AB$ soit un automorphisme orthogonal de E.

1. Encore une fois, il faut tout simplement vérifier les trois axiomes de la définition.

Montrons que $\langle\ |\ \rangle$ est un produit scalaire :

- Soit $(A, B) \in E^2$, alors
$$\langle B|A\rangle = \mathrm{tr}({}^tBA) = \mathrm{tr}({}^t({}^tAB)) = \mathrm{tr}({}^tAB) = \langle A|B\rangle .$$
donc $\langle\ |\ \rangle$ est symétrique
- Soient $(A, B, C) \in E^3$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, alors
$$\begin{aligned}
\langle \lambda A + \mu B|C\rangle &= \mathrm{tr}({}^t(\lambda A + \mu B)C) = \mathrm{tr}(\lambda {}^tAC + \mu {}^tBC) \\
&= \lambda\,\mathrm{tr}({}^tAC) + \mu\,\mathrm{tr}({}^tBC) = \lambda \langle A|C\rangle + \mu \langle B|C\rangle
\end{aligned}$$
donc $\langle\ |\ \rangle$ est linéaire à gauche. Par symétrie, $\langle\ |\ \rangle$ est bilinéaire.
- Soit $A \in E$, alors
$$\langle A|A\rangle = \sum_{i=1}^n ({}^tAA)_{i,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n ({}^tA)_{i,j} a_{j,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{j,i}^2 \geqslant 0$$

où les $a_{i,j}$ sont les coefficients de A. Supposons $\langle A|A\rangle = 0$. Comme c'est une somme de réels positifs, ils sont tous nuls, et pour tout $(i,j) \in \{1,\dots,n\}^2$, $a_{j,i}^2 = 0$. Par suite, $a_{j,i} = 0$, ce qui montre que $A = 0$. Ainsi $\langle \ | \ \rangle$ est défini positif.

En conclusion, $\langle \ | \ \rangle$ définit un produit scalaire sur E.

2. L'énoncé demande de trouver une condition nécessaire et suffisante sur B pour que f soit un automorphisme orthogonal. Pour ce faire, on commence par supposer f orthogonal et on en tire le maximum d'information sur B (un peu comme dans un raisonnement par analyse/synthèse). Lorsqu'on obtient une condition qui parait satisfaisante sur B, il faudra prouver qu'elle est bien suffisante.

▶ **Condition nécessaire :**

Supposons avoir $B \in E$ tel que f soit un automorphisme orthogonal. Pour tout $(A,C) \in E^2$, on a alors $\langle f(A)|f(C)\rangle = \langle A|C\rangle$ i.e.

$$\mathrm{tr}({}^t f(A) f(C)) = \mathrm{tr}({}^t AC) \quad \text{i.e.} \quad \mathrm{tr}({}^t B {}^t ACB) = \mathrm{tr}({}^t AC)$$
$$\text{i.e.} \quad \mathrm{tr}({}^t ACB {}^t B) = \mathrm{tr}({}^t AC)$$

puisque $\mathrm{tr}({}^t B({}^t ACB)) = \mathrm{tr}(({}^t ACB){}^t B)$.
Ceci équivaut à $\langle A|CB{}^t B\rangle = \langle A|C\rangle$, donc à $\langle A|CB{}^t B - C\rangle = 0$. Comme ceci vaut pour tout $A \in E$, $CB{}^t B - C = 0$ i.e. $CB{}^t B = C$. En prenant $C = I_n$, on trouve $B{}^t B = I_n$, c'est-à-dire $B \in O_n(\mathbb{R})$.

Il ne faut pas oublier de vérifier que si B est une matrice orthogonale, alors f est un automorphisme orthogonal.

▶ **Condition suffisante :**

Réciproquement, supposons $B \in O_n(\mathbb{R})$. Alors pour tout $(A,C) \in E^2$, on a

$$\langle f(A)|f(C)\rangle = \mathrm{tr}({}^t f(A) f(C)) = \mathrm{tr}({}^t B {}^t ACB) = \mathrm{tr}({}^t ACB {}^t B)$$
$$= \mathrm{tr}({}^t AC) = \langle A|C\rangle$$

donc f est un automorphisme orthogonal.
En conclusion, f est un automorphisme orthogonal si et seulement si B est une matrice orthogonale.

3. On procède de même que dans la question précédente.

▶ **Condition nécessaire :**

Supposons avoir $B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ tel que f soit un automorphisme orthogonal.

Alors pour tout $(A, C) \in E^2$, on a $\langle f(A) | f(C) \rangle = \langle A | C \rangle$ i.e.

$$\operatorname{tr}({}^t f(A) f(C)) = \operatorname{tr}({}^t AC) \quad \text{i.e.} \quad \operatorname{tr}({}^t B^t A^t B^{-1} B^{-1} CB) = \operatorname{tr}({}^t AC)$$
$$\text{i.e.} \quad \operatorname{tr}({}^t A (B^t B)^{-1} C B^t B) = \operatorname{tr}({}^t AC).$$

Ceci équivaut à

$$\left\langle A \middle| (B^t B)^{-1} C B^t B \right\rangle = \langle A | C \rangle \,,$$

donc à

$$\left\langle A \middle| (B^t B)^{-1} C B^t B - C \right\rangle = 0.$$

Comme ceci vaut pour tout $A \in E$,

$$(B^t B)^{-1} C B^t B - C = 0 \quad \text{i.e.} \quad C B^t B = B^t B C.$$

Il faut maintenant bien se souvenir (et savoir prouver rapidement) que les matrices qui commutent avec toute matrice sont les matrices scalaires.

En prenant $C = E_{i,j}$ (la matrice dont tous les coefficients sont nuls, sauf le coefficient (i, j) qui vaut 1) pour $(i, j) \in \{1, \ldots, n\}^2$, et notant $M = B^t B$, on calcule que CM est la matrice dont toutes les lignes sont nulles, sauf la i-ème, qui est la j-ième ligne de M, et que MC est la matrice dont toutes les colonnes sont nulles, sauf la j-ième, qui est la i-ème colonne de M. Si $i \neq j$, on en déduit que $m_{i,j} = 0$ et que $m_{i,i} = m_{j,j}$. Ainsi M est de la forme λI_n, $\lambda \in \mathbb{R}$.
De plus, on a B inversible, donc $M = B^t B$ est inversible, ce qui montre que $\lambda \neq 0$.
Pour $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, ${}^t X B^t B X = \|{}^t B X\|^2 > 0$ (où $\| \;\; \|$ désigne la norme euclidienne usuelle sur $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$), donc $\lambda N(X)^2 = N({}^t B X)^2 > 0$, ce qui montre que $\lambda > 0$. On peut donc poser $\alpha = \pm\sqrt{\lambda}$ et $B_1 = \dfrac{1}{\alpha} B$. La relation $B^t B = I_n$ donc $B_1^t B_1 = I_n$, donc $B_1 \in O_n(\mathbb{R})$. Au final, $B = \alpha B_1$, avec $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et $B_1 \in O_n(\mathbb{R})$.

▶ **Condition suffisante :**

Réciproquement, supposons avoir $B_1 \in O_n(\mathbb{R})$ et $\alpha \in \mathbb{R}^*$ tel que $B = \alpha B_1$. Alors pour tout $(A, C) \in E^2$, on a

$$\begin{aligned} \langle f(A) | f(C) \rangle &= \operatorname{tr}({}^t B^t A^t B^{-1} B^{-1} CB) = \alpha^{-2} \operatorname{tr}({}^t B^t ACB) \\ &= \alpha^{-2} \operatorname{tr}({}^t ACB^t B) = \operatorname{tr}({}^t AC) = \langle A | C \rangle \end{aligned}$$

donc f est un automorphisme orthogonal.
En conclusion, f est un automorphisme orthogonal si et seulement si B est de la forme αB_1, avec $B_1 \in O_n(\mathbb{R})$ et $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

Exercice 3.5 : Formes quadratiques

Soient E un espace euclidien de dimension n et p endomorphismes symétriques $u_1, \dots, u_p$ de E. Pour $i \in \{1, \dots, p\}$, on note $q_i = x \mapsto \langle u_i(x)|x\rangle$.
On suppose que $\forall x \in E$, $q_1(x)+\dots+q_p(x) = \|x\|^2$ et que $\mathrm{rg}(u_1)+\dots+\mathrm{rg}(u_p) = n$.
1. Montrer que $u_1 + \dots + u_p = \mathrm{Id}_E$.
2. Montrer que $\mathrm{Im}(u_1) \oplus \dots \oplus \mathrm{Im}(u_p) = E$.
3. Montrer que les u_i sont en fait des projecteurs orthogonaux et que la somme précédente est orthogonale.

1. Pour $x \in E$, l'identité de l'énoncé se réécrit $\langle u_1(x) + \dots + u_p(x) - x|x\rangle = 0$. On aimerait plutôt avoir $\langle u_1(x) + \dots + u_p(x) - x|y\rangle = 0$ pour tout $y \in E$, ainsi le vecteur $u_1(x) + \dots + u_p(x) - x$ serait orthogonal à tout vecteur de E, donc nul.

À elle seule, l'identité $< u_1(x) + \dots + u_p(x) - x, x >= 0$ ne donne pas $u_1(x) + \dots + u_p(x) - x = 0$!

On cherche donc à montrer que

$$\langle x|y\rangle = \langle u_1(x) + \dots + u_p(x)|y\rangle \,.$$

Pour pouvoir appliquer l'hypothèse (qui concerne des normes) il faut trouver une expression de $\langle x|y\rangle$ en fonction de normes. On utilise alors une identité de polarisation.

Soit $(x, y) \in E^2$, on a, d'après les formules de polarisation :

$$\begin{aligned}
\langle x|y\rangle &= \frac{1}{2}(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{p} q_i(x+y) - \sum_{i=1}^{p} q_i(x) - \sum_{i=1}^{p} q_i(y)\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p}(\langle u_i(x+y)|x+y\rangle - \langle u_i(x)|x\rangle - \langle u_i(y)|y\rangle) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p}(\langle u_i(x)|y\rangle + \langle u_i(y)|x\rangle) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p}(\langle u_i(x)|y\rangle + \langle y|u_i(x)\rangle) \\
&= \sum_{i=1}^{p} \langle u_i(x)|y\rangle
\end{aligned}$$

puisque les u_i sont symétriques.

Ainsi $\langle u_1(x) + \cdots + u_p(x) - x | y \rangle = 0$, donc $u_1(x) + \cdots + u_p(x) - x$ est orthogonal à tout vecteur de E. Il est donc nul, et $u_1(x) + \cdots + u_p(x) = x$.
Ainsi $u_1 + \cdots + u_p = id_E$.

2. Comme on a une hypothèse de dimension, nous n'avons que la moitié du travail à faire : il faut simplement démontrer que

- la somme des $\mathrm{Im}(u_i)$ vaut E
- ou bien que la somme est directe

pour avoir le résultat.
La question précédente nous donne facilement le premier point, c'est donc ce que nous allons montrer.

Pour $x \in E$, on a

$$x = u_1(x) + \cdots + u_p(x) \in \mathrm{Im}(u_1) + \cdots + \mathrm{Im}(u_p)$$

par la question précédente. Ainsi $E \subset \mathrm{Im}(u_1) + \cdots + \mathrm{Im}(u_p)$.
On en déduit que $\mathrm{Im}(u_1) + \cdots + \mathrm{Im}(u_p) = E$, l'inclusion réciproque étant évidente. Or

$$\dim(\mathrm{Im}(u_1)) + \cdots + \dim(\mathrm{Im}(u_p)) = \mathrm{rg}(u_1) + \cdots + \mathrm{rg}(u_p) = n = \dim(E)$$

donc la somme est directe.

3. Il faut ici penser à appliquer ce qui a été démontré dans la question précédente, c'est-à-dire l'unicité de la décomposition d'un élément sur la somme des $\mathrm{Im}(u_i)$: pour $i \in \{1, \ldots, p\}$, on peut écrire $u_i(x)$ comme somme de 0 et de $u_i(x)$ d'une part, et d'autre part comme la somme des $u_j(u_i(x))$ par la première question.

Soient $i \in \{1, \ldots, p\}$ et $x \in E$. Pour j entre 1 et p, on note $y_j = 0$ si $j \neq i$ et $y_i = u_i(x)$, de sorte que $y_j \in \mathrm{Im}(u_j)$.
D'après la première question, on a

$$y_1 + \cdots + y_p = u_i(x) = u_1(u_i(x)) + \cdots + u_p(u_i(x))$$

avec $u_j(u_i(x)) \in \mathrm{Im}(u_j)$ pour j entre 1 et p.
La somme des $\mathrm{Im}(u_i)$ étant directe, on a unicité de l'écriture de $u_i(x)$ comme somme d'éléments des $\mathrm{Im}(u_j)$. Ainsi pour $j \in \{1, \ldots, p\}$, $u_j(u_i(x)) = y_j = 0$ si $j \neq i$ et $u_i^2(x) = y_i = u_i(x)$.
On a donc $u_i^2 = u_i$, et u_i est un projecteur. Comme u_i est symétrique, c'est un projecteur orthogonal.
Si $i \neq j \in \{1, \ldots p\}$, on a $u_i \circ u_j = 0$. Pour $y \in \mathrm{Im}(u_i)$ et $z \in \mathrm{Im}(u_j)$, il existe $(a, b) \in E^2$ tel que $y = u_i(a)$ et $z = u_j(b)$. Alors

$$\langle y | z \rangle = \langle u_i(a) | u_j(b) \rangle = \langle a | u_i(u_j(b)) \rangle = \langle a | 0 \rangle = 0,$$

donc $\mathrm{Im}(u_i) \perp \mathrm{Im}(u_j)$.
Ainsi la somme qui précède est orthogonale.

Exercice 3.6 : Quotients de Rayleigh

Soient E un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme symétrique.
1. Montrer qu'il existe α et $\beta \in \mathbb{R}$, qu'on exprimera en fonction des valeurs propres de u, tels que
$$\forall x \in E, \quad \alpha\|x\|^2 \leqslant \langle u(x)|x\rangle \leqslant \beta\|x\|^2.$$
2. Montrer que si pour $x \neq 0$, l'une ou l'autre des inégalités précédentes est une égalité alors x est vecteur propre de u.
3. On note $\lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ les valeurs propres de u, et on suppose avoir $(e_1, \ldots, e_n)$ base orthonormée de E telle que $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, $\langle u(e_i)|e_i\rangle = \lambda_i$.
Montrer que $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, $u(e_i) = \lambda_i e_i$.

1. Comme u est symétrique, on utilise le théorème spectral. Dans la base orthonormée obtenue, les calculs seront grandement simplifiés.

D'après le théorème spectral, on a $B = (e_1, \ldots, e_n)$ base orthonormée de E telle que $\mathrm{Mat}_B(u)$ soit diagonale. Pour $i \in \{1, \ldots n\}$, e_i est vecteur propre de u, donc on a $\lambda_i \in \mathbb{R}$ tel que $u(e_i) = \lambda_i e_i$.
Si $x \in E$, notons $(x_1, \ldots, x_n)$ les coordonnées de x en base B. On a alors
$$u(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i u(e_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i e_i.$$
Ainsi (comme $(e_1, \ldots, e_n)$ est orthonormée),
$$\langle u(x)|x\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2.$$

Pour encadrer le produit scalaire $\langle u(x)|x\rangle$ entre deux réels faisant intervenir $\|x\|^2$, il faut donc encadrer λ_i entre deux valeurs. On introduit donc la plus petite et la plus grande des valeurs propres de u.

Notons $\alpha = \min(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ et $\beta = \max(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ (la plus petite et la plus grande des valeurs propres de u).
Pour i entre 1 et n, $\alpha x_i^2 \leqslant \lambda_i x_i^2 \leqslant \beta x_i^2$ (car $x_i^2 \geqslant 0$), donc en sommant :
$$\alpha\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \alpha x_i^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} \beta x_i^2 = \beta\|x\|^2,$$
puis $\alpha\|x\|^2 \leqslant \langle u(x)|x\rangle \leqslant \beta\|x\|^2$.

2. En reprenant les inégalités obtenues dans la question précédente, il faut, pour qu'on ait égalité, qu'il y ait égalité partout. On le traduit plus rigoureusement en regroupant les termes du même côté et en se ramenant à une somme de réels positifs ou nulss.

Soit $x \in E\backslash\{0\}$ tel qu'on ait $\alpha\|x\|^2 = \langle u(x)|x\rangle$. Notant $(x_1, \dots, x_n)$ les coordonnées de x dans une base orthonormée de vecteurs propres de u, on a comme plus haut $\alpha x_i^2 \leqslant \lambda_i x_i^2$ pour tout i entre 1 et n.
Or, par hypothèse,

$$\sum_{i=1}^{n}(\lambda_i - \alpha)x_i^2 = \langle u(x)|x\rangle - \alpha\|x\|^2 = 0.$$

C'est une somme de réels tous positifs, donc on a $(\lambda_i - \alpha)x_i^2 = 0$ pour tout $i \in \{1, \dots n\}$. Si i est tel que $x_i \neq 0$, on a donc $\lambda_i = \alpha$ ce qui donne

$$u(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i u(e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \lambda_i e_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \alpha e_i = \alpha x.$$

On montre de même que si $x \in E$ vérifie $\langle u(x)|x\rangle = \beta\|x\|^2$, alors $u(x) = \beta x$.

3. La question précédente permet d'obtenir que $u(e_1) = \lambda_1 e_1$ et $u(e_n) = \lambda_n e_n$. On restreint alors u à l'espace engendré par $(e_2, \dots, e_n)$ (c'est-à-dire l'orthogonal de e_1) pour pouvoir itérer le raisonnement.

Il faut bien vérifier que u stabilise F puis que l'endomorphisme induit par u sur F vérifie les mêmes hypothèses pour pouvoir itérer.

Comme λ_1 est la plus petite valeur propre de u, on a $\lambda_1 = \alpha$ d'après la première question. On a donc $u(e_1) = \lambda_1 e_1$ par la question précédente.
Notons $F = (\mathbb{R}e_1)^\perp$, comme $e_2, \dots, e_n$ sont orthogonaux à e_1, ils sont dans F.
u étant symétrique, on a F stable par u : en effet, si $x \in F$,

$$\langle u(x)|e_1\rangle = \langle x|u(e_1)\rangle = \lambda_1 \langle x|e_1\rangle = 0.$$

L'endomorphisme induit par u sur F a pour valeurs propres $\lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$. Par le raisonnement vu plus haut, on a donc $u(e_2) = \lambda_2 e_2$.
On réitère alors jusqu'à obtenir $u(e_j) = \lambda_j e_j$ pour tout j entre 1 et n.

Exercice 3.7 : Matrices définies positives

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. On dit que A est positive (resp. définie positive) si $\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXAX \geqslant 0$ (resp. > 0 si $X \neq 0$).
1. Montrer que A est positive si et seulement si toutes ses valeurs propres sont positives.
2. Montrer que A est définie positive si et seulement si toutes ses valeurs propres sont strictement positives.

1. Nous avons une équivalence à démontrer, on va donc traiter indépendamment les deux implications.
Pour le sens direct, on évalue ${}^tXAX$ pour X vecteur propre de A.

Supposons A positive. Si λ est valeur propre de A, et $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})\backslash\{0\}$ est un vecteur propre associé, on a $AX = \lambda X$, puis ${}^tXAX = \lambda {}^tXX$.
Or, notant $(x_1, \ldots, x_n)$ les coordonnées de X,

$$ {}^tXX = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 > 0 $$

(puisque c'est une somme de réels positifs non tous nuls), donc comme par hypothèse ${}^tXAX \geqslant 0$, on a $\lambda \geqslant 0$. Ainsi toutes les valeurs propres de A sont positives.

Pour le sens réciproque, on applique le théorème spectral. Le calcul de ${}^tXAX$ sera plus facile après changement de base pour avoir une matrice diagonale.

Supposons que toutes les valeurs propres de A soient positives. Par le théorème spectral, on a $P \in O_n(\mathbb{R})$ et D une matrice diagonale (dont les coefficients sont les valeurs propres de A, donc des nombres positifs) tels que $A = {}^tPDP$.
Pour $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, posons $Y = PX$, et notons $(y_1, \ldots, y_n)$ les coordonnées de Y, $d_1, \ldots, d_n$ les coefficients diagonaux (positifs) de D. Alors

$$ {}^tXAX = {}^tX{}^tPDPX = {}^tYDY = \sum_{i=1}^{n} d_i y_i^2 \geqslant 0. $$

Ainsi A est une matrice symétrique positive.

2. Cette question est très similaire à la précédente, en prenant soin de bien adapter les inégalités.

Attention à justifier proprement les inégalités strictes, sans faire de confusions avec les inégalités larges.

Comme dans la question précédente, on a deux sens à montrer.

- Supposons A définie positive. Soit λ une valeur propre de A, et donnons-nous $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})\backslash\{0\}$ un vecteur propre associé, on a $AX = \lambda X$, dont on déduit que ${}^tXAX = \lambda {}^tXX$.
  Or, notant $(x_1, \ldots, x_n)$ les coordonnées de X,
  $$ {}^tXX = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 > 0 $$
  (puisque c'est une somme de réels positifs non tous nuls), donc comme ${}^tXAX > 0$, on a $\lambda > 0$. Ainsi toutes les valeurs propres de A sont strictement positives.

- Supposons que toutes les valeurs propres de A soient strictement positives. Par le théorème spectral, on a $P \in O_n(\mathbb{R})$ et D une matrice diagonale (dont les coefficients sont les valeurs propres de A, donc des nombres > 0) tels que $A = {}^tPDP$. Notons $d_1, \dots, d_n$ les coefficients diagonaux (tous > 0) de D.

  Pour $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})\backslash\{0\}$, posons $Y = PX$. Comme $X \neq 0$, $Y \neq 0$ (car P est inversible), les coordonnées $(y_1, \dots, y_n)$ de Y sont non toutes nulles. Alors
  $$ {}^tXAX = {}^tX{}^tPDPX = {}^tYDY = \sum_{i=1}^{n} d_i y_i^2 > 0 $$
  comme somme de réels positifs non tous nuls. Ainsi A est une matrice définie-positive.

On a bien sûr des énoncés équivalents pour des matrices négatives, ou définie-négatives.

Exercice 3.8 : Décomposition polaire

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in GL_n(\mathbb{R})$. On pose $B = {}^tAA$.
1. Montrer que pour tout $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})\backslash\{0\}$, ${}^tXBX > 0$.
En déduire que toutes les valeurs propres de B sont strictement positives.
2. Montrer qu'il existe $C \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ inversible telle que $C^2 = B$.
3. En déduire qu'il existe $(H, C) \in O_n(\mathbb{R}) \times \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ tel que $A = HC$, puis généraliser cette décomposition à une matrice A quelconque.
On pourra utiliser les résultats des exercices **4.5** et **4.14**.

1. Le calcul de ${}^tXBX$ revient à faire le calcul de la norme de Y, où $Y = AX$. Il faut donc simplement justifier que ce vecteur est non nul (ce qui vient de l'inversibilité de A).

Soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})\backslash\{0\}$. Comme A est inversible, $AX \neq 0$ et, notant $(y_1, \dots, y_n)$ les coordonnées de $Y = AX$, on a
$$ {}^tXBX = {}^tX{}^tAAX = {}^tYY = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 > 0. $$
comme somme de réels positifs non tous nuls.
Si λ est valeur propre de B, et si $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})\backslash\{0\}$ est un vecteur propre associé, on a donc $BX = \lambda X$, puis ${}^tXBX = \lambda{}^tXX$.

Or, notant $(x_1, \ldots, x_n)$ les coordonnées de X,

$$^tXX = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 > 0$$

puisque c'est une somme de réels positifs non tous nuls. Comme $^tXBX > 0$, on a $\lambda > 0$

Ainsi toutes les valeurs propres de B sont strictement positives.

2. On constate que la matrice B est symétrique. En appliquant le théorème spectral, on peut donc se ramener (modulo un changement de base orthonormée) à une matrice diagonale, avec des coefficients diagonaux tous positifs par la question précédente. Trouver une matrice C tel que $C^2 = B$ sera alors chose facile.

Lorsqu'on a un endomorphisme ou une matrice symétrique réelle, appliquer le théorème spectral doit être un réflexe quasi-systématique.

Comme $^tB = {}^tA^t({}^tA) = {}^tAA = B$, on a B symétrique. Par le théorème spectral, il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ et D une matrice diagonale tels que $B = {}^tPDP$. Les coefficients diagonaux de D sont les valeurs propres de B, donc sont tous strictement positifs d'après la question précédente. Notons-les $d_1, \ldots, d_n$ et posons

$$\Delta = \begin{pmatrix} \sqrt{d_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \sqrt{d_n} \end{pmatrix},$$

de sorte que $\Delta^2 = D$.

Soit alors $C = {}^tP\Delta P$. Comme Δ est inversible (puisqu'elle diagonale à coefficients diagonaux tous non nuls), C est inversible comme produits de matrices qui le sont. Comme Δ est symétrique, on a $^tC = {}^tP^t\Delta P = {}^tP\Delta P = C$ et C est symétrique. Par suite, on a

$$C^2 = {}^tP\Delta P^tP\Delta P = {}^tP\Delta^2 P = {}^tPDP = B.$$

En ajoutant l'hypothèse C définie-positive, comme défini dans l'exercice **3.7**, on peut également montrer que C est unique.

3. Une petite analyse nous montre que si (C, H) convient,

$$B = {}^tAA = {}^tC^tHHC = C^2 = B$$

(puisque C est symétrique et H orthogonale). Il faut donc poser C la matrice obtenue dans la question précédente, et ensuite $H = AC^{-1}$ (possible car C est inversible).

Soit C la matrice donnée par la question précédent, et posons $H = AC^{-1}$. Ceci est licite puisque C est inversible, sinon $B = C^2$ ne serait pas inversible donc aurait 0 pour valeur propre, ce qui est exclu par la première question.
On a C est symétrique, et comme

$$^tHH = {}^t(C^{-1})^tAAC^{-1} = C^{-1}BC = I_n$$

(puisque C est symétrique et $B = C^2$), on a $H \in O_n(\mathbb{R})$.
Enfin, $A = HC$, donc on a la décomposition voulue.

Pour généraliser cette décomposition, il faut se souvenir de deux faits topologiques classiques sur les ensembles de matrices : $GL_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $O_n(\mathbb{R})$ est compact (voir les exercices **4.5** et **4.14**).

On munit $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme N telle que $N(A) = \max_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i,j}|$. Notons que $GL_n(R)$ est dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ d'aprè l'exercice **4.5**.
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On a alors $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in GL_n(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ qui converge vers A (pour la norme N).
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $(C_n, H_n) \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \times O_n(\mathbb{R})$ tel que $A_n = H_nC_n$ d'après ce qui précède.
Or $O_n(\mathbb{R})$ est compact, donc $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une suite extraite $(H_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge, disons vers $H \in O_n(\mathbb{R})$. Alors $(C_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $C = H^{-1}A$, et comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, ${}^tC_n = C_n$, ${}^tC = C$, donc C est symétrique (la transposition étant continue car linéaire en dimension finie).
Enfin, $A = HC$ en passant à la limite la relation $A_{\varphi(n)} = H_{\varphi(n)}C_{\varphi(n)}$, et par continuité du produit matriciel.

Exercice 3.9 : Connexité par arcs de $SO_n(\mathbb{R})$

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in SO_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que A soit de la forme

$$^tP \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} P,$$

où $r \in \mathbb{N}$, D est une matrice diagonale par blocs, avec des blocs de la forme

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

En déduire que $SO_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.

Pour montrer la décomposition voulue, il faut utiliser la réduction des isométries de E.

On a $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que A soit de la forme

$$^tP \begin{pmatrix} I_r & 0 & 0 \\ 0 & -I_s & 0 \\ 0 & 0 & R \end{pmatrix} P,$$

avec r, $s \in \{0, \ldots, n\}$ et R une matrice diagonale par blocs, avec des blocs de la forme $R(\theta)$.

On peut réordonner les termes dans la forme réduite de A de la manière dont on le souhaite : cela revient à changer l'ordre des colonnes de P, la matrice de changement de base.

De plus $\det(A) = 1$, et comme pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\det(R(\theta)) = 1$, $\det(R) = 1$. Ainsi

$$1 = \det({}^tP)(-1)^s \det(P) = \det(P)^2(-1)^s = (-1)^s,$$

et s est pair. On peut donc réécrire $-I_s$ sous la forme d'une matrice diagonale par blocs, avec des blocs de la forme

$$R(\pi) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

ce qui donnera la forme voulue.

Pour en déduire que $SO_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs, il faut construire un chemin continu inclus dans $SO_n(\mathbb{R})$, reliant deux matrices quelconques de $SO_n(\mathbb{R})$. Il suffit en fait de montrer qu'on peut relier une matrice quelconque à un point particulier de $SO_n(\mathbb{R})$, par exemple l'identité. On utilise alors la forme précédente.

Le chemin construit doit rester inclus dans $SO_n(\mathbb{R})$, on déforme donc les matrices $R(\theta)$ pour arriver à des matrices I_2 en gardant des matrices de rotation.

On a $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que A soit de la forme

$${}^tP \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} P,$$

avec R diagonale par blocs, avec des blocs de la forme $R(\theta_1), \ldots, R(\theta_k)$ (où $k \in \mathbb{N}$).

Pour $t \in [0, 1]$, notons $R(t)$ la matrice diagonale par blocs, avec des blocs diagonaux de la forme $R(\theta_1(1 - t)), \ldots, R(\theta_k(1 - t))$. En faisant le produit par blocs, on vérifie facilement que $R(t) \in O_n(\mathbb{R})$, et comme $\det(R(t)) = 1$, $R(t) \in SO_n(\mathbb{R})$.

On pose alors

$$\varphi(t) = {}^tP \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & R(t) \end{pmatrix} P \in SO_n(\mathbb{R}),$$

et $\varphi : [0,1] \to SO_n(\mathbb{R})$ est continue (car chaque coefficient est un polynôme de fonctions trigonométriques, donc est continu) avec

$$\varphi(0) = A \qquad \text{et} \qquad \varphi(1) = {}^tPP = I_n.$$

Le fait de montrer que tout élément de $SO_n(\mathbb{R})$ puisse être relié à I_n montre que $SO_n(\mathbb{R})$ possède une seule composante connexe par arcs, donc est connexe par arcs.

Exercice 3.10 : Étude d'une rotation en dimension 3

On pose

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Montrer que A est une matrice de rotation dont on précisera les éléments caractéristiques.

On vérifie que A est une matrice de rotation en montrant que c'est une matrice orthogonale de déterminant 1. On détermine ensuite l'axe de la rotation en résolvant le système $AX = X$, et on peut trouver le cosinus de l'angle en calculant la trace de A. En effet, la trace de A vaut $1 + 2\cos(\theta)$.

Il faut enfin trouver le signe du sinus de l'angle en calculant $\mathrm{Det}(k, x, Ax)$ pour x un vecteur orthogonal à l'axe et unitaire et k un vecteur directeur unitaire orientant l'axe.

Notons que les trois colonnes de A forment une famille orthonormée de 3 éléments, donc $A \in O_3(\mathbb{R})$. En effectuant $L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3$ et $L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3$, puis en développant suivant la première colonne, on obtient alors :

$$\det(A) = \frac{1}{27}\begin{vmatrix} 0 & 6 & -3 \\ 0 & -3 & 6 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{27}\begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 1.$$

Ainsi A est une matrice de rotation. Pour

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}),$$

le système $AX = X$ équivaut à

$$\left\{\begin{array}{l} 2x + 2y + z = 3x \\ -2x + y + 2z = 3y \\ x - 2y + 2z = 3z \end{array}\right. \quad \text{i.e.} \quad \left\{\begin{array}{l} -x + 2y + z = 0 \\ -2x - 2y + 2z = 0 \\ x - 2y - z = 0 \end{array}\right. \quad \text{i.e.} \quad \left\{\begin{array}{l} x = z \\ y = 0 \end{array}\right.$$

donc
$$k = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
est un vecteur dirigeant l'axe de la rotation. On se donne ce vecteur pour orienter l'axe.

Si on choisit un vecteur opposé à k, on obtiendra un angle opposé.

Sous sa forme réduite, la trace d'une matrice de rotation est $1+2\cos\theta$. Comme la trace est un invariant de similitude, on a donc $1+2\cos\theta = \frac{5}{3}$ donc $\cos\theta = \frac{1}{3}$ puis $\theta \equiv \pm \arccos\left(\frac{1}{3}\right) \quad [2\pi]$. En prenant
$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ on obtient } Ax = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix},$$
donc, comme $x \perp k$ et $\|x\| = \|k\| = 1$,
$$\sin\theta = \operatorname{Det}(k, x, Ax) = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -\frac{4}{3\sqrt{2}}$$
en développant par rapport à la deuxième colonne.
Ainsi, comme $\sin\theta < 0$, A est la matrice de la rotation d'axe
$$\mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et d'angle } -\arccos\left(\frac{1}{3}\right).$$

Dans le calcul du déterminant, il faut choisir pour x et k des vecteurs normés.

Partie 2

Topologie

Topologie

CHAPITRE

4 Topologie des espaces vectoriels normés

Exercice 4.1 : Réunion et intersection de boules

Dans un espace vectoriel normé E, on désigne par $B_r(a)$ et $B'_r(a)$ les boules, respectivement ouvertes et fermées, de centre a et de rayon r.
1. Déterminer $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_{\frac{n+1}{n}}(a)$. Qu'en déduit-on ?
2. Déterminer $\bigcup_{n=1}^{\infty} B'_{\frac{n}{n+1}}(a)$. Qu'en déduit-on ?

1. On observe que les rayons tendent vers 1 quand n tend vers l'infini. L'objectif est d'aboutir à des mises en garde sur des intersections et des réunions infinies.

Comme $\dfrac{n+1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, on a :

$$\begin{aligned}\bigcap_{n=1}^{\infty} B_{\frac{n+1}{n}}(a) &= \left\{x \in E \ ; \ \forall n \geqslant 1 \quad \|x-a\| < \frac{n+1}{n}\right\}\\ &= \{x \in E \ ; \ \|x-a\| \leqslant 1\}\\ &= B'_1(a),\end{aligned}$$

n'est pas un ensemble ouvert.

2. Là encore, on a l'ensemble cherché directement.

Comme $\dfrac{n}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, on a :

$$\begin{aligned}\bigcup_{n=1}^{\infty} B'_{\frac{n}{n+1}}(a) &= \left\{x \in E \ ; \ \exists n \geqslant 1 \quad \|x-a\| \leqslant \frac{n}{n+1}\right\}\\ &= \{x \in E \ ; \ \|x-a\| < 1\}\\ &= B_1(a)\end{aligned}$$

n'est pas un ensemble fermé.

On a donc montré qu'une intersection infinie d'ouverts n'est pas toujours un ouvert et qu'une réunion infinie de fermés n'est pas toujours un fermé.

Exercice 4.2 : Ouverts et fermés

On désigne par p_1 et p_2 les deux fonctions coordonnées de $\mathbb{R}^2$ définies par

$$p_1(x,y) = x \quad \text{et} \quad p_2(x,y) = y$$

pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
1. Montrer que si O est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $p_1(O)$ et $p_2(O)$ sont des ouverts de $\mathbb{R}$.
2. Soit $H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, xy = 1\}$. Montrer que H est un fermé dans $\mathbb{R}^2$ mais que $p_1(H)$ et $p_2(H)$ ne sont pas fermés dans $\mathbb{R}$.

1. Pour montrer qu'un ensemble est ouvert, il faut montrer qu'il contient un voisinage de chacun de ses points.

Ici l'énoncé ne précise pas la norme choisie. C'est parce que toutes les normes sont équivalentes en dimension finie. On peut donc utiliser la norme qui nous parait la plus pratique.

On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme définie par $\|(x,y)\| = \max(|x|,|y|)$ pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
Soit $a \in p_1(O)$. On a alors $(x,y) \in O$ tel que $p_1(x,y) = a$, ce qui donne $x = a$.
Comme O est ouvert, il existe $r > 0$ tel que pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $\|(u,v) - (a,y)\| < r$, $(u,v) \in O$. Si $b \in]a-r, a+r[$, on a alors

$$\|(b,y) - (a,y)\| = |b - a| < r,$$

donc $(b,y) \in O$. Par suite $b = p_1(b,y) \in p_1(O)$ ce qui montre que $p_1(O)$ est ouvert.
On montre de la même manière que $p_2(O)$ est ouvert.

2. Pour montrer qu'un ensemble est fermé, on utilise généralement la caractérisation séquentielle. Dans le cas de la partie H, on peut aussi aller plus rapidement en constatant que $H = h^{-1}(\{1\})$, si l'on pose $h : (x,y) \mapsto xy$.

Soit $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto xy$. h est polynomiale en x et y donc continue. Comme $\{1\}$ est une fermé de $\mathbb{R}$, $H = h^{-1}(\{1\})$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

Pour montrer que $p_1(H)$ n'est pas fermé, il suffit de déterminer cet ensemble.

Notons que si $x \in p_1(H)$, on a $y \in \mathbb{R}$ tel que $(x,y) \in H$, soit $xy = 1$. Ainsi $x \in \mathbb{R}^*$. Réciproquement, si $x \in \mathbb{R}^*$, on peut poser $y = \dfrac{1}{x}$ et $(x,y) \in H$. Ainsi $p_1(H) = \mathbb{R}^*$ qui n'est pas fermé.
De même, on montre que $p_2(H) = \mathbb{R}^*$ qui n'est pas non plus un fermé.

Les applications p_1 et p_2 sont certes continues, mais le cours donne $p_1^{-1}(F)$ fermé si F est un fermé de $\mathbb{R}$. On n'a aucune information sur l'image directe d'un fermé.

Exercice 4.3 : Comparaison de normes

Soit E l'espace vectoriel réel $\mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ et N l'application de E dans $\mathbb{R}_+$ définie par : $N(f) = \sqrt{f^2(0) + \int_0^1 f'^2(t)\,\mathrm{d}t}$.
1. Démontrer que N est une norme.
2. Comparer N et $\|\cdot\|_\infty$.

1. On peut tenter de montrer directement que N est une norme en suivant la définition, mais montrer l'inégalité triangulaire est un peu compliqué. La racine et les carrés doivent faire penser à une norme euclidienne. Il est donc plus simple d'introduire le produit scalaire associé.

Considérons la forme définie sur $E \times E$ par :

$$\varphi(f,g) = f(0)\,g(0) + \int_0^1 f'(t)\,g'(t)\,\mathrm{d}t.$$

et montrons que φ définit un produit scalaire sur E.
φ est clairement symétrique, et pour $(f,g,h) \in E^2$, et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda f + \mu g, h) &= (\lambda f(0) + \mu g(0))\,h(0) + \int_0^1 (\lambda f'(t) + \mu g'(t))h'(t)dt \\ &= \lambda\left(f(0)\,h(0) + \int_0^1 f'(t)\,h'(t)dt\right) \\ &\quad + \mu\left(g(0)\,h(0) + \int_0^1 g'(t)\,h'(t)dt\right) \\ &= \lambda\,\varphi(f,h) + \mu\,\varphi(g,h)\end{aligned}$$

donc φ est linéaire à gauche, donc bilinéaire avec la symétrie.

φ est clairement positive, et si $f \in E$ vérifie $\varphi(f, f) = 0$, alors

$$f^2(0) + \int_0^1 f'^2(t)\,\mathrm{d}t = 0 \text{ donc } f(0) = 0 \text{ et } \int_0^1 f'(t)^2 dt = 0.$$

Comme $(f')^2$ est positive et continue, on en déduit qu'elle est nulle. f est donc constante, et comme $f(0) = 0$, $f = 0$.
Ainsi, φ est un produit scalaire sur E, et N est la norme euclidienne qui lui est associée.

2. Il faut maintenant étudier si l'une des normes est plus fine que l'autre, si elles sont équivalentes.

Comme E est de dimension infinie, on ne sait pas a priori si les deux normes sont équivalentes.

En général, la réponse est alors non. Plus précisément, nous allons démontrer que, parmi les deux nombres α et β de la définition de normes équivalentes, l'un existe et l'autre non.
On peut, à partir de $f(x)$, retrouver $f(0)$ et une intégrale faisant intervenir f' en pensant à la relation $f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t)dt$.

Pour $f \in E$ et $x \in [0, 1]$, on a : $f(x) = f(0) + \displaystyle\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t$. On en déduit :

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leqslant |f(0)| + \left|\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant |f(0)| + \int_0^x |f'(t)|\;\mathrm{d}t \\ &\leqslant |f(0)| + \int_0^1 |f'(t)|\;\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

puis :

$$f^2(x) \leqslant 2\left[f^2(0) + \left(\int_0^1 |f'(t)|\;\mathrm{d}t\right)^2\right]$$

car, pour tous réels a et b, on a : $(a + b)^2 \leqslant 2(a^2 + b^2)$.
En effet, $2(a^2 + b^2) - (a + b)^2 = a^2 + b^2 - 2a\,b = (a - b)^2 \geqslant 0$
D'autre part, l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne :

$$\left(\int_0^1 1 \times |f'(t)|\;\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \int_0^1 1^2\,\mathrm{d}t \times \int_0^1 f'^2(t)\,\mathrm{d}t.$$

On a donc, pour tout $x \in [0, 1]$, $|f(x)| \leqslant \sqrt{2}N(f)$, ce qui permet de conclure :

$$\|f\|_\infty \leqslant \sqrt{2}N(f).$$

Dans l'autre sens, nous allons montrer que $\left\{\frac{N(f)}{\|f\|_\infty} ; f \in E\right\}$ n'est pas majoré ; il faut pour ce faire imaginer une suite (f_n) de fonctions de E dont le quotient des normes tende vers l'infini. Un contre-exemple usuel, surtout lorsqu'il y a des dérivées, est donné par la suite $f_n : t \mapsto t^n$.

Considérons les fonctions f_n (avec $n \in \mathbb{N}^*$) définies sur $[0, 1]$ par $f_n(t) = t^n$. On a bien $f_n \in E$; et le calcul donne : $\|f_n\|_\infty = 1$ et

$$N(f_n)^2 = \int_0^1 n^2 t^{2n-2} = \frac{n^2}{2n-1} \text{ donc } N(f_n) = \frac{n}{\sqrt{2n-1}}.$$

L'ensemble des quotients $\dfrac{N(f_n)}{\|f_n\|_\infty} = \dfrac{n}{\sqrt{2n-1}}$ n'est donc pas majoré.
Les normes N et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas équivalentes.

Exercice 4.4 : Normes équivalentes

On considère l'espace vectoriel E des fonctions $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telles que $f(0) = 0$. On définit deux normes en posant, pour $f \in E$:

$$N_1(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty \qquad\qquad N_2(f) = \|f + f'\|_\infty.$$

où $\|g\|_\infty$ désigne la borne supérieure de $|g|$ sur $[0, 1]$. On rappelle que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur E.

1. Démontrer que N_1 et N_2 sont bien des normes.
2. Montrer que ni N_1 ni N_2 ne sont équivalentes à $\|\ \|_\infty$.
3. Démontrer qu'elles sont équivalentes.

1. Vérifier qu'une application est une norme est généralement routinier.

▶ **Étude de N_1**

N_1 est bien une application de E dans $\mathbb{R}_+$. Par ailleurs :

- Soit $f \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, sachant que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme :
$$N_1(\lambda f) = \|\lambda f\|_\infty + \|\lambda f'\|_\infty = |\lambda|\,\|f\|_\infty + |\lambda|\,\|f'\|_\infty = |\lambda|\,N_1(f)$$
donc N_1 est homogène.
- Soit f et $g \in E$. On a :
$$\begin{aligned} N_1(f+g) &= \|f+g\|_\infty + \|f'+g'\|_\infty \\ &\leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty + \|f'\|_\infty + \|g'\|_\infty \\ &\leqslant N_1(f) + N_1(g) \end{aligned}$$
donc N_1 vérifie l'inégalité triangulaire.
- Soit $f \in E$ telle que $N_1(f) = 0$. Alors $\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty = 0$, dont on déduit que $\|f\|_\infty = \|f'\|_\infty = 0$ (car ces nombres sont positifs) d'où enfin $f = 0$. Ainsi N_1 est définie positive.

N_1 est donc bien une norme sur E.

▶ **Étude de N_2**
Les trois premiers points sont analogues au cas précédent. Étudions seulement le dernier.

Soit $f \in E$ telle que $N_2(f) = 0$.
Alors $\|f + f'\|_\infty = 0$, soit $f + f' = 0$ (car $\|.\|_\infty$ est une norme sur E).
D'après les résultats du cours sur les équations différentielles, il existe un réel K tel que :
$$\forall x \in [0,1], \quad f(x) = K\,\mathrm{e}^{-x}.$$
Par ailleurs, $f \in E$ donc $f(0) = 0$, ce qui impose $K = 0$ d'où $f = 0$. N_2 est donc bien une norme sur E.

La principale difficulté dans la démonstration d'une norme est souvent de vérifier $\|f\| = 0 \implies f = 0$. C'est donc le seul point qu'on ne peut pas passer sous silence.

2. Pour montrer que N_1 et N_2 ne sont pas équivalentes à $\| \ \|_\infty$, il suffit de trouver une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée pour $\| \ \|_\infty$, mais telle $N_1(f_n)$ et $N_2(f_n)$ tendent vers $+\infty$. Il faut pour cela considérer une suite de fonctions uniformément bornées sur $[0,1]$, mais dont les dérivées explosent. On peut alors penser à $t \mapsto t^n$, $t \mapsto \cos(nt)$...

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n : t \mapsto t^n$. Comme f_n est de classe $\mathscr{C}^1$ et $f_n(0) = 0$, $f_n \in E$. On a $\|f_n\|_\infty = 1$. Pour $t \in [0,1]$, $f_n'(t) = nt^{n-1}$, donc $\|f_n'\|_\infty = n$ et $\|f_n + f_n'\|_\infty = 1 + n$. Ainsi $N_1(f_n) = N_2(f_n) = 1 + n$. Comme
$$\frac{N_1(f_n)}{\|f_n\|_\infty} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \text{ et } \frac{N_2(f_n)}{\|f_n\|_\infty} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$
N_1 n'est pas équivalente à $\| \ \|_\infty$, et N_2 non plus.

3. On souhaite démontrer qu'il existe deux nombres réels positifs a et b tels que, pour tout $f \in E$:
$$N_1(f) \leqslant a\,N_2(f) \text{ et } N_2(f) \leqslant b\,N_1(f).$$
Ici, une inégalité est claire (par l'inégalité triangulaire) et l'autre beaucoup moins...

Soit $f \in E$. Alors, pour tout $x \in [0,1]$:
$$|f(x) + f'(x)| \leqslant |f(x)| + |f'(x)| \leqslant \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty.$$
Ainsi, le réel $\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ est un majorant de la fonction $|f + f'|$ donc :
$$\|f + f'\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$$
c'est-à-dire : $N_2(f) \leqslant N_1(f)$.

Pour l'autre inégalité, il nous faut trouver f et f' en fonction de $h = f + f'$. Ceci revient à résoudre l'équation différentielle $f + f' = h$. Une fois la résolution effectuée, on connaîtra $f(x)$ en fonction de h, donc $f'(x)$ aussi et il sera facile de majorer $N_1(f)$ en fonction de $N_2(f)$.

Posons $h = f + f'$. f est alors solution de l'équation différentielle $f + f' = h$. La solution générale de l'équation homogène associée est $x \mapsto \lambda\, \mathrm{e}^{-x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Par la méthode de variation de la constante, on cherche une solution particulière sous la forme $x \mapsto \lambda(x)\, \mathrm{e}^{-x}$, avec λ dérivable sur $[0, 1]$. On trouve, en reportant dans l'équation,

$$\lambda'(x)\, \mathrm{e}^{-x} = h(x) \text{ donc } \lambda'(x) = h(x)\, \mathrm{e}^{x}.$$

Une solution particulière est donc $x \mapsto \mathrm{e}^{-x} \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^t h(t)\, \mathrm{d}t$. La solution générale de l'équation différentielle $f + f' = h$ est donc $x \mapsto \lambda \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^t h(t)\, \mathrm{d}t$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
Avec la condition initiale $f(0) = 0$, qui implique $\lambda = 0$, on trouve donc que pour $x \in [0, 1]$, $f(x) = \mathrm{e}^{-x} \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^t\, h(t)\, \mathrm{d}t$. Ainsi,

$$|f(x)| \leqslant \int_0^x \mathrm{e}^t\, |h(t)|\, \mathrm{d}t \leqslant \int_0^x \mathrm{e}\, \|h\|_\infty\, \mathrm{d}t \leqslant \mathrm{e}\, \|f + f'\|_\infty.$$

On a donc $\|f\|_\infty \leqslant \mathrm{e}\|f + f'\|_\infty$. D'autre part, pour $x \in [0, 1]$,

$$|f'(x)| \leqslant |h(x)| + |f(x)| \leqslant \|f + f'\|_\infty + \mathrm{e}\, \|f + f'\|_\infty \leqslant (1 + \mathrm{e})\, \|f + f'\|_\infty,$$

et donc $\|f'\|_\infty \leqslant (1 + \mathrm{e})\, \|f + f'\|_\infty$.
Au final, on obtient $N_1(f) \leqslant (2\mathrm{e} + 1)\, N_2(f)$, et les deux normes sont bien équivalentes.

Exercice 4.5 : Parties denses dans un ensemble de matrices

Soit $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.
1. Montrer que $GL_n(\mathbb{C})$ est dense dans E.
2. Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables à valeurs propres simples est dense dans E. (On pourra penser à trigonaliser.)

Comme l'espace est de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes ; on choisit ici la norme $\|M\| = \max_{i,j} |m_{ij}|$.

1. Si $A \in E$, et $\varepsilon > 0$, on doit trouver une matrice inversible M tel que $\|M - A\| < \varepsilon$. On cherche M sous la forme $A + \lambda\, \mathrm{I}_n$. La condition d'inversibilité nous dit que $-\lambda$ ne doit pas être valeur propre de A. L'inégalité nous dit que $|\lambda| < \varepsilon$.

La matrice A a au plus n valeurs propres. Dans l'ensemble $\{z \in \mathbb{C}\,;\ |\lambda| < \varepsilon\}$ (infini), on peut donc trouver un λ tel que $-\lambda$ ne soit pas valeur propre de A. On a alors $M = A + \lambda\, \mathrm{I}_n$ inversible, avec $\|M - A\| = |\lambda| < \varepsilon$.
Ainsi $GL_n(\mathbb{C})$ est dense dans E.

2. $A \in E$, on doit maintenant trouver une suite de matrices diagonalisables à valeurs propres simples $(M_p)_{p\in\mathbb{N}}$ qui converge vers A. Le fait que M_p ait n valeurs propres simples impliquera qu'elle soit diagonalisable ; on cherche donc M_p avec n valeurs propres simples.
En suivant l'indication, on trigonalise A. On lira alors sur la diagonale les valeurs propres de A. On ajoute alors aux coefficients diagonaux des quantités qui tendent vers 0 en module, de manière à obtenir une matrice avec des coefficients diagonaux deux à deux distincts. Cette matrice aura alors n valeurs propres distinctes.

Le polynôme caractéristique de A est scindé dans $\mathbb{C}[X]$, donc A est trigonalisable. On a donc $P \in GL_n(\mathbb{C})$ tel que $A = P^{-1}TP$, avec T triangulaire supérieure. Les coefficients diagonaux $t_1, \dots, t_n$ de T sont les valeurs propres de A.
Notons e l'écart minimal en module entre deux t_k distincts :

$$\delta = \min(|t_k - t_j| \,;\, (k,j) \in \{1, \dots, n\}^2 \text{ tq } t_k \neq t_j\}.$$

Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on note D_p la matrice diagonale ayant pour coefficients diagonaux

$$\frac{\delta}{3p}e^{2i\pi/n}, \frac{\delta}{3p}e^{4i\pi/n}, \dots, \frac{\delta}{3p}e^{2in\pi/n}.$$

Alors $T + D_p$ est triangulaire supérieure, et ses coefficients diagonaux sont deux à deux distincts.

Il est nécessaire de prendre n éléments deux à deux distincts (pour le cas où deux t_i sont égaux) de modules $< \frac{\delta}{2}$ (pour que dans le cas de t_i distincts, on ne puisse retomber sur deux éléments égaux).

En effet, pour $k \neq j \in \{1, \dots, n\}$, si $t_k = t_j$,

$$t_k + \frac{\delta}{3p}e^{2ik\pi/n} \neq t_j + \frac{\delta}{3p}e^{2ij\pi/n};$$

et si $t_k \neq t_j$, $|t_j - t_k| \geqslant \delta > 2\dfrac{\delta}{3p}$, donc là encore

$$t_k + \frac{\delta}{3p}e^{2ik\pi/n} \neq t_j + \frac{\delta}{3p}e^{2ij\pi/n}.$$

La matrice $M_p = P(T + D_p)P^{-1}$ a les mêmes valeurs propres que $T + D_p$, donc n valeurs propres simples. Elle est donc diagonalisable. Il est clair que $(D_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0 (car $\|D_p\| = \dfrac{\delta}{3p}$). Par continuité du produit matriciel (qui est une application bilinéaire en dimension finie), la suite $(M_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $PTP^{-1} = A$, ce qu'il fallait démontrer.

Exercice 4.6 : Partie dense dans un ensemble de polynômes

On considère $E = \mathbb{R}[X]$ muni de la norme :

$$\|P\| = \sup\{|P(t)| \ ; t \in [-1,1]\}$$

1. Montrer que $\| \ \|$ définit bien une norme sur E.
2. Démontrer que l'ensemble des polynômes nuls en 2 est une partie dense de E.
On pourra étudier la suite $\left(\left(\dfrac{X}{2}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. On sait que $\| \ \|$ définit une norme sur l'ensemble des fonctions continues de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$, les propriétés se transposent rapidement à $E = \mathbb{R}[X]$, il faut juste vérifier le caractère défini.

$\| \ \|$ étant une norme sur l'ensemble des fonctions continues de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$, elle est encore positive, homogène, et vérifie l'inégalité triangulaire sur E. Si $P \in E$ vérifie $\|P\| = 0$, alors pour tout $t \in [-1,1]$, $|P(t)| \leqslant \|P\| = 0$, donc $P(t) = 0$. P admet donc une inifinité de racines, donc est le polynôme nul.
Ainsi $\| \ \|$ est une norme sur E.

2. Il s'agit de démontrer que tout polynôme de E est un point adhérent de l'ensemble considéré. Pour ceci, on peut démontrer qu'il est la limite d'une suite de polynômes nuls en 2. On étudie alors la suite donnée en indication.

Il faudra que cette limite soit relative à la norme fournie, car l'espace E étant de dimension infinie, il n'y a aucune raison que deux normes de E soient équivalentes.

Désignons par F l'ensemble des polynômes nuls en 2, c'est-à-dire les polynômes Q tels que $Q(2) = 0$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\left\|\left(\frac{X}{2}\right)^n\right\| = \sup\left\{\left|\left(\frac{t}{2}\right)^n\right| \ ; t \in [-1,1]\right\} = \frac{1}{2^n}$$

donc la suite $\left(\left(\dfrac{X}{2}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Pour $P \in E$ et $n \in \mathbb{N}$, considérons alors le polynôme $Q_n = P - P(2)\left(\dfrac{X}{2}\right)^n$.

Alors $Q_n(2) = P(2) - P(2) = 0$ donc $Q_n \in F$, et par opérations sur les limites, $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers P.

Ainsi F est dense dans E.

Exercice 4.7 : Caractérisation des normes euclidiennes

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $\| \ \|$ une norme sur E vérifiant l'identité du parallèlogramme :

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Le but de cet exercice est de montrer que $\| \ \|$ est une norme euclidienne.
On note f l'application de E^2 dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2).$$

1. Montrer que pour $(x,y,z) \in E^3$,

$$(*) \qquad f(x+z,y) + f(x-z,y) = 2\,f(x,y).$$

2. Montrer que pour $(x,y) \in E^2$,

$$f(r\,x,y) = r\,f(x,y)$$

pour r successivement dans $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$.
3. Montrer que f est bilinéaire.
4. Montrer que $\| \ \|$ est une norme euclidienne.

1. La première formule demandée se trouve aisément avec la définition de f et l'hypothèse.

Par définition de f, on a, en utilisant l'identité du parallèlogramme,

$$\begin{aligned} f(x+z,y) + f(x-z,y) &= \frac{1}{4}(\|x+z+y\|^3 - \|x+z-y\|^4 \\ &\quad + \|x-z+y\|^2 - \|x-z-y\|^2) \\ &= \frac{1}{4}(2(\|x+y\|^2 + \|z\|^2) - 2(\|x-y\|^2 + \|z\|^2)) \\ &= \frac{1}{2}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) \\ &= 2f(x,y) \end{aligned}$$

2. On commence par démontrer que $f(n\,x,y) = n\,f(x,y)$ par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. La question précédente relie $f((n+2)\,x,y)$ avec $f((n+1)\,x,y)$ et $f(n\,x,y)$, on fait donc une récurrence d'ordre 2.

Il ne faut pas oublier de démontrer deux initialisations dans une récurrence d'ordre 2.

Soit $(x, y) \in E^2$. Montrons par récurrence d'ordre 2 sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété H_n : « $f(n\,x, y) = n\,f(x, y)$ ».

- H_1 est claire, et on a $f(0, y) = 0$ donc on a H_0.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que H_n et H_{n+1}. D'après $(*)$, on a

$$f((n+2)\,x, y) + f(n\,x, y) = 2f((n+1)\,x, y).$$

Avec l'hypothèse de récurrence, on en déduit donc que

$$f((n+2)\,x, y) = 2\,(n+1)\,f(x, y) - n\,f(x, y) = (n+2)\,f(x, y),$$

et on a H_{n+2}.

En conclusion, $\forall n \in \mathbb{N}$, H_n.

On passe ensuite de $\mathbb{N}$ à $\mathbb{Z}$ en utilisant l'opposé. La relation $(*)$ nous donne

$$f(-z, y) + f(z, y) = 2\,f(0, y)$$

en prenant $x = 0$, ce qui nous donnera le résultat voulu.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on a, par $(*)$

$$f(n\,x, y) + f(-\,n\,x, y) = 2\,f(0, y) = 0$$

donc $f(-\,n\,x, y) = -\,f(n\,x, y) = -\,n\,f(x, y)$.
On a donc $f(n\,x, y) = n\,f(x, y)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Pour passer de $\mathbb{Z}$ à $\mathbb{Q}$, il faut ajouter le dénominateur. On doit donc montrer que $\frac{1}{q}f(x, y) = f(\frac{1}{q}x, y)$. Ceci revient à $f(x, y) = q\,f(\frac{1}{q}x, y)$, qui est vrai par ce qui précède.

Soit $r \in \mathbb{Q}$, on a alors $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $r = \dfrac{p}{q}$. D'après ce qui précède, on a

$$q\,f\left(\frac{1}{q}x, y\right) = f\left(\frac{q}{q}x, y\right) = f(x, y).$$

Ainsi $f\left(\dfrac{1}{q}x, y\right) = \dfrac{1}{q}f(x, y)$. Par suite

$$f(r\,x, y) = p\,f\left(\frac{1}{q}x, y\right) = \frac{p}{q}f(x, y) = r\,f(x, y).$$

Enfin, pour passer de $\mathbb{Q}$ à $\mathbb{R}$, on utilise l'approximation décimale : si $r \in \mathbb{R}$, la suite des approximations décimales de r par défaut est une suite de rationnels qui converge vers r. La continuité de f permettra alors de conclure.

Soit $r \in \mathbb{R}$. Notons $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des approximations décimales de r par défaut. On sait que $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers r. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, r_n est rationnel, on a :

$$f(r_n\,x, y) = r_n\,f(x, y).$$

D'autre part, f est continue (car la norme l'est), donc en passant à la limite la relation précédente, on obtient

$$f(r\,x, y) = r\,f(x, y).$$

Cette question illustre bien les relations entre les divers ensembles de nombres, et la manière dont ils sont construits les uns par rapport aux autres.

3. f est clairement symétrique, il faut donc montrer la bilinéarité à gauche. Avec la question précédente, il reste simplement à montrer que

$$f(x+y,z) = f(x,z) + f(y,z).$$

Ceci vient de la relation $(*)$.

Soit $(x,y,z) \in E^3$. D'après la relation $(*)$, on a

$$f\left(\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}, z\right) + f\left(\frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2}, z\right) = 2\,f\left(\frac{x+y}{2}, z\right)$$

c'est-à-dire :

$$f(x,z) + f(y,z) = 2\,f\left(\frac{x+y}{2}, z\right) = f(x+y,z).$$

Par suite, et avec la question précédente, f est linéaire à gauche.
Comme f est symétrique (par homogénéité de la norme), f est bilinéaire.

4. Il reste juste à montrer le caractère défini-positif pour que f soit un produit scalaire. Comme f est défini à partir de $\|\ \|$ par une formule de polarisation, la norme associée à f devrait être $\|\ \|$.

On a vu dans la question précédente que f est bilinéaire et symétrique. Pour $x \in E$, on a

$$f(x,x) = \frac{1}{4}(\|x+x\|^2 - \|x-x\|^2) = \|x\|^2$$

donc $f(x,x) \geqslant 0$ avec égalité si et seulement si $x = 0$.
Ainsi f est un produit scalaire, et le calcul précédent montre que sa norme associée est $\|\ \|$.

Exercice 4.8 : Fonction continue

1. Soient E et F deux espaces vectoriels normés et $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Montrer l'équivalence entre :

a) f est continue ;

b) pour tout suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E qui converge vers 0, la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée (dans F).

2. Si E est un espace vectoriel normé et $f \in E^* = \mathscr{L}(E,\mathbb{K})$, montrer que f est continue si et seulement si $\operatorname{Ker} f$ est fermé.

1. Nous allons noter N la norme de E et N' la norme de F. On commence par le sens facile

▶ (**a**) $\implies$ (**b**).

Supposons que f soit continue et soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ qui converge vers 0. On a alors : $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(0) = 0$, ce qui entraine que $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

▶ (**b**) $\implies$ (**a**).

Nous allons utiliser la caractérisation de la continuité d'une application linéaire. Elle est continue si et seulement si $\exists M > 0$, $\forall x \in E$, $N'(f(x)) \leqslant M\,N(x)$. On raisonne par contraposée en supposant f non continue, et on construit une suite exploitant la négation de cette propriété.

En topologie, et surtout lorsqu'on souhaite se ramener à une suite, on raisonne par l'absurde ou par contraposée. La nouvelle phrase logique commençant par un $\forall M > 0$, on pourra l'appliquer en tous les entiers naturels.

Supposons f non continue. Alors

$$\forall M > 0, \quad \exists x \in E, \quad N'(f(x)) > M\,N(x).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a donc $x_n \in E$ tel que $N'(f(x_n)) > n\,N(x_n)$. Si $x_n = 0$, $f(x_n) = 0$ et l'inégalité n'est pas vérifiée. Ainsi $x_n \neq 0$ et on peut donc poser $y_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}N(x_n)} x_n$. Comme $N(y_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.
Par linéarité de f, on a :

$$N'(f(y_n)) = \frac{1}{\sqrt{n}N(x_n)} N'(f(x_n)) > \sqrt{n}$$

donc la suite $(f(y_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas bornée.
Par contraposée, on a donc montré que $(b) \implies (a)$.

2. Comme dans la question précédente, il faut montrer les deux sens. L'un vient directement des propriétés du cours.

▶ **Sens direct**

Supposons f continue. Alors $\operatorname{Ker} f = f^{-1}(\{0\})$ est l'image réciproque d'un fermé de $\mathbb{K}$ par f, donc est un fermé de E.

▶ **Sens réciproque**

Pour l'autre sens, on raisonne par contraposée comme dans la question précédente.

Supposons f non continue. Alors

$$\forall M > 0, \quad \exists x \in E, \quad |f(x)| > M\,N(x).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a donc $x_n \in E$ tel que $|f(x_n)| > n\,N(x_n)$.
Comme f est une forme linéaire non nulle (sinon elle serait continue), f est de rang 1, donc surjective. On a donc $a \in E$ tel que $f(a) = 1$. Par suite $\mathbb{K}\,a$ et $\mathrm{Ker}(f)$ sont deux espaces supplémentaires dans E. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a donc un unique $(\lambda_n, h_n) \in \mathbb{K} \times \mathrm{Ker}\, f$ tel que $x_n = \lambda_n\, a + h_n$.
En appliquant f, on obtient

$$|\lambda_n| = |f(\lambda_n\, a + h_n)| = |f(x_n)| > nN(x_n).$$

On a donc $N(\lambda_n^{-1} x_n) < \dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $(\lambda_n^{-1} x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0. Ainsi $(\lambda_n^{-1} h_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $-a$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lambda_n^{-1} h_n \in \mathrm{Ker}\, f$, et comme $f(-a) = -1 \neq 0$, $-a \notin \mathrm{Ker}\, f$. Ainsi $\mathrm{Ker}\, f$ n'est pas fermé.
Par contraposée, si $\mathrm{Ker}\, f$ est fermé, alors f est continue.

Exercice 4.9 : Fonction uniformément continue

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ ayant une limite finie à l'infini. Démontrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$.

Il s'agit de généraliser à l'infini un énoncé vrai sur un segment (ici le théorème de Heine). Pour ce faire, il faut utiliser la définition de la limite pour se ramener à un segment.

Pour montrer l'uniforme continuité il faut trouver un $\eta > 0$ tel que tous les x et y à distance plus petite que η vérifient $|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$. Cet η ne doit dépendre ni de x, ni de y.

Soit $\varepsilon > 0$. L'hypothèse $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ entraîne l'existence de

$$A > 0 \quad \text{tel que} \quad \forall x \geqslant A, \quad |f(x) - \ell| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

Par suite, pour $x \geqslant A$ et $y \geqslant A$, on a :

$$|f(x) - f(y)| \leqslant |f(x) - \ell| + |\ell - f(y)| \leqslant \frac{2\varepsilon}{3}.$$

D'autre part, f est continue sur le segment $[0, A]$; elle y est donc uniformément continue. On a donc :

$$\eta > 0 \quad \text{tel que} \quad \forall (x, y) \in [0, A]^2, \quad |x - y| \leqslant \eta \implies |f(x) - f(y)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

Enfin, si $x \leqslant A \leqslant y$ avec $|x - y| \leqslant \eta$, on a :

$$|f(x) - f(y)| \leqslant |f(x) - f(A)| + |f(A) - f(y)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Pour tous les x et $y \in \mathbb{R}_+$ tels que $|x-y| \leqslant \eta$, on a donc $|f(x)-f(y)| \leqslant \varepsilon$.
En conclusion :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^2, \quad |x-y| \leqslant \eta \implies |f(x)-f(y)| \leqslant \varepsilon.$$

f est donc uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$.

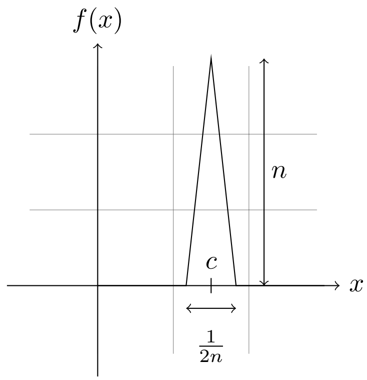
Exercice 4.10 : Application linéaire non continue

Soit $E = \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme $\|f\|_1 = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|\, \mathrm{d}t$ et $c \in]0,1[$. Démontrer que l'application Φ de E dans $\mathbb{R}$: $f \mapsto f(c)$ n'est pas continue.

Remarquons d'abord que le problème est possible puisque E n'est pas de dimension finie.
Pour démontrer que Φ n'est pas continue, il suffit de montrer qu'on peut trouver une suite de fonction $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\frac{|\Phi(f_n)|}{N(f_n)} = \frac{|f_n(c)|}{N(f_n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

On cherche donc $f_n(c)$ de plus en plus grand, avec $N(f_n)$ constant. On pense alors à des fonctions triangulaires.



Comme dans cet exemple, l'intégrale d'une fonction peut avoir une valeur très petite alors que la fonction a des valeurs très grandes.

Soit $n \in \mathbb{N}$, assez grand pour que $0 < c - \dfrac{1}{n} < c + \dfrac{1}{n} < 1$. On définit f_n sur $[0,1]$ comme étant affine par morceaux avec :

- f_n constante nulle sur $[0, c - \dfrac{1}{n}]$;

- pour $t \in [c - \frac{1}{n}, c]$, $f_n(t) = n^2 \left(t - c + \frac{1}{n}\right)$;
- pour $t \in [c, c + \frac{1}{n}]$, $f_n(t) = n^2 \left(c + \frac{1}{n} - t\right)$;
- f_n constante nulle sur $[c + \frac{1}{n}, 1]$.

On a alors $N(f_n) = \displaystyle\int_0^1 |f_n(t)|dt$ qui est l'aire d'un triangle de base $\frac{2}{n}$ et hauteur n, donc $N(f_n) = 1$.
D'autre part, $f_n(c) = n$, donc

$$\frac{|\Phi(f_n)|}{N(f_n)} = \frac{|f_n(c)|}{N(f_n)} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Ainsi Φ n'est pas continue.

Exercice 4.11 : Applications linéaires continues

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie non réduit à $\{0\}$ et $u \in \mathscr{L}(E)$. On pose :

$$N(u) = \sup\{\|u(x)\| \,;\, x \in E \text{ tq } \|x\| = 1\}.$$

1. Montrer que $N(u)$ existe et que c'est un maximum.
2. Montrer N définit une norme sur $\mathscr{L}(E)$.
3. Montrer que pour $(u, v) \in \mathscr{L}(E)^2$, $N(v \circ u) \leqslant N(u) \times N(v)$.

1. Pour montrer que la borne supérieure existe, il faut montrer que l'ensemble correspondant est non vide et majoré.

L'ensemble $A = \{\|u(x)\| \,;\, x \in E \text{ tq } \|x\| = 1\}$ est non vide puisque E contient un vecteur de norme 1 : comme $E \neq \{0\}$, en prenant $x \in E \backslash \{0\}$, $\frac{x}{\|x\|}$ est de norme 1.
Comme u est linéaire en dimension finie, u est lipschitzienne, disons de rapport k. Pour $x \in E$ tel que $\|x\| = 1$, on a donc

$$\|u(x)\| = \|u(x) - u(0)\| \leqslant k \,\|x - 0\| = k$$

et A est majoré par k.
Ainsi A admet une borne supérieure, et $N(u)$ est bien défini.

Le fait que $N(u)$ soit un maximum n'est pas évident, puisqu'une borne sup n'est pas atteinte, en général.

Il faut maintenant montrer que $N(u)$ est un maximum, c'est-à-dire que $x \mapsto \|u(x)\|$ atteint son maximum sur l'ensemble S des vecteurs de norme 1. Il faut pour cela utiliser le théorème des bornes en montrant que S est compact.

Notons $S = \{x \in E\,;\, \|x\| = 1\}$. S est clairement borné (par 1) et c'est un fermé, puisque c'est l'image réciproque de $\{1\}$ (un fermé de $\mathbb{R}$) par l'application $\|\ \ \|$, qui est continue.
Comme E est de dimension finie, S est un compact de E. Comme vu plus haut, u est continue, donc par le théorème des bornes, $x \mapsto \|u(x)\|$ atteint ses bornes sur S. $N(u)$ est donc un maximum.

2. On vérifie un à un les axiomes de définition d'une norme.

Montrons que N est une norme.

- On a vu que N est bien définie et à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.
- Pour $u \in \mathscr{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} N(\lambda u) &= \sup\{\|\lambda u(x)\|\,;\, x \in E \text{ tq } \|x\| = 1\} \\ &= \sup\{|\lambda|\,\|u(x)\|\,;\, x \in E \text{ tq } \|x\| = 1\} \\ &= |\lambda|\, N(u) \end{aligned}$$

  donc N est homogène.
- Pour u et $v \in \mathscr{L}(E)$, on a, pour $x \in E$ tel que $\|x\| = 1$, d'après l'inégalité triangulaire :

$$\|u(x) + v(x)\| \leqslant \|u(x)\| + \|v(x)\| \leqslant N(u) + N(v).$$

  Ceci valant pour tout $x \in E$ de norme 1, on obtient donc

$$N(u + v) \leqslant N(u) + N(v)$$

  en passant à la borne supérieure et N vérifie l'inégalité triangulaire.
- Enfin, soit $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $N(u) = 0$. Pour $x \in E\backslash\{0\}$, $y = \dfrac{x}{\|x\|}$ est de norme 1, donc $\|u(y)\| \leqslant N(u) = 0$. Ainsi $u(y) = 0$ et par linéarité de u, $u(x) = \|x\|\, u(y) = 0$. Comme $u(0) = 0$, on obtient u est constante nulle, ce qui montre que N est définie positive.

Ainsi N est une norme sur $\mathscr{L}(E)$.

3. Pour $x \in E$ de norme 1, il faut majorer $v(u(x))$. On a facilement $\|u(x)\| \leqslant N(u)$, mais pour majorer $\|v(u(x))\|$, il faut revenir au cas où $u(x)$ est unitaire. S'il est non nul, il suffit de le diviser par sa norme. Il faut donc distinguer le cas $u(x) = 0$.

Soit $x \in E$ de norme 1. Si $u(x) \neq 0$, alors $y = \dfrac{u(x)}{\|u(x)\|}$ est de norme 1, donc $\|v(y)\| \leqslant N(v)$. En multipliant par $\|u(x)\| \geqslant 0$, on obtient donc (par linéarité de v)

$$\|v(u(x))\| \leqslant \|u(x)\|\,\|v(y)\| \leqslant N(u) \times N(v).$$

Si maintenant $u(x) = 0$, on a $v(u(x)) = 0$, donc l'inégalité plus haut est encore vérifiée.
Dans tous les cas, $\|v(u(x))\| \leqslant N(u) \times N(v)$ donc en passant à la borne supérieure, $N(v \circ u) \leqslant N(u) \times N(v)$.

On a alors aisément $N(u^n) \leqslant N(u)^n$ pour $n \in \mathbb{N}$. Ceci permet de montrer que la série $\sum \frac{u^n}{n!}$ converge absolument dans $(\mathscr{L}(E), N)$, donc converge, et de définir $\exp(u)$.

Exercice 4.12 : Un théorème de point fixe

Soient K une partie compacte d'un espace vectoriel normé E, et $f : K \to K$ telle que $\forall (x,y) \in K^2$, $x \neq y \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|$.
1. Montrer que f admet un unique point fixe l. Pour l'existence, on pourra considérer l'application $h : K \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \|f(x) - x\|$.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ définie par récurrence par $u_0 \in K$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l.

1. L'unicité viendra facilement de l'hypothèse. Pour l'existence, on considère l'application donnée en indication. Un point fixe correspondrait à un zéro, donc à un minimum de cette fonction. On utilise donc l'hypothèse de compacité pour appliquer le théorème des bornes.

- **Unicité :** Supposons avoir l et m deux points fixes de f. Si $l \neq m$,
$$\|l - m\| = \|f(l) - f(m)\| < \|l - m\|$$
ce qui est absurde ! Ainsi $l = m$ et on a unicité.
- **Existence :** Soit $h : K \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \|f(x) - x\|$. h est continue comme combinaison linéaire et composée de fonctions qui le sont (f étant continue car lipschitzienne). Comme K est compact, elle est bornée et atteint ses bornes, en particulier son minimum. On a donc $x_0 \in K$ tel que $\forall x \in K$, $h(x_0) \leqslant h(x)$. Si $f(x_0) \neq x_0$, par hypothèse,
$$\|f(f(x_0)) - f(x_0)\| < \|f(x_0) - x_0\|$$
i.e. $h(f(x_0)) < h(x_0)$... absurde ! Ainsi $f(x_0) = x_0$ et on a l'existence.

2. La compacité permet d'obtenir une suite extraite convergente de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. L'hypothèse de l'énoncé montre aussi que la suite $(\|u_n - l\|)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Il faut alors montrer que sa limite est nulle.

Comme K est stable par f, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans l'ensemble K, qui est compact. Elle admet donc une suite extraite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ convergente, disons vers x. Comme f est 1-lipschitzienne, elles est continue, et la suite $(u_{\varphi(n)+1})_{n\in\mathbb{N}} = (f(u_{\varphi(n)}))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$.
D'autre part, comme pour $n \in \mathbb{N}$, $\|u_{n+1} - l\| = \|f(u_n) - f(l)\| < \|u_n - l\|$, la suite $(\|u_n - l\|)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Elle est minorée par 0, donc converge, par le théorème de la limite monotone, disons vers a. Toutes ses suites extraites convergent vers la même limite. Comme $(\|u_{\varphi(n)} - l\|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\|x - l\|$ on a $a = \|x - l\|$ par unicité de la limite. De même $(\|u_{\varphi(n)+1} - l\|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\|f(x) - l\|$, donc $\|f(x) - l\| = a$.
Si $x \neq l$, on devrait pourtant avoir $\|f(x) - l\| = \|f(x) - f(l)\| < \|x - l\|$... exclus ! Ainsi $x = l$. Par suite $(\|u_n - l\|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $a = 0$, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l.

Si x est une valeur d'adhérence d'une suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on ne peut pas immédiatement dire que x est point fixe de f.

Exercice 4.13 : Valeurs d'adhérence

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle bornée.
1. Si $(u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un segment de $\mathbb{R}$.
2. On suppose avoir $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Si $(u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

1. Pour montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite est un intervalle, il faut montrer que c'est une partie convexe de $\mathbb{R}$. On raisonne par l'absurde : si ce n'est pas le cas, on a $a < b$ deux valeurs d'adhérence et $c \in]a, b[$ non valeur d'adhérence. On a alors un $\varepsilon > 0$ tel que le nombre de termes de la suite à distance plus petite que ε de c soit fini.
Cependant la suite doit passer une infinité de fois à distance plus petite que ε de a et de b. D'autre part, elle fait des pas de longueur plus petite que ε à partir d'un certain rang. Ceci nous apportera la contradiction.

Notons V l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrons que V est convexe. Soit $a < b \in V$, supposons que $[a, b]$ ne soit pas inclus dans V. On a alors $c \in]a, b[$ tel que $c \notin V$.
On a alors $\varepsilon > 0$ tel que $\{n \in \mathbb{N} \,;\, |u_n - c| \leqslant \varepsilon\}$ est fini. On a donc $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N_1, \quad |u_n - c| > \varepsilon.$$

et, quitte à le réduire encore, on suppose que $a + \varepsilon < c - \varepsilon$ et $c + \varepsilon < b - \varepsilon$.

Par définition de la limite, on a $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que
$$\forall n \geqslant N_2, \quad |u_{n+1} - u_n| \leqslant \varepsilon.$$
Posons $N = \max(N_1, N_2)$. Comme a est valeur d'adhérence, on a $n \geqslant N$ tel $|u_n - a| \leqslant \varepsilon$. On a ensuite $p \geqslant n$ tel que $|u_p - b| \leqslant \varepsilon$ (puisque b est valeur d'adhérence). Notons
$$A = \{k \in \{n, \dots, p\} \text{ , } u_k < c\}.$$
A est non vide (car contient n) et majoré (par p). Il a donc un plus grand élément k. On a $k < p$ (car $u_p \geqslant b - \varepsilon > c$) donc $u_{k+1} \geqslant c$. Comme $k \geqslant N$, $|u_{k+1} - u_k| \leqslant \varepsilon$, ainsi $|u_k - c| \leqslant \varepsilon$.... absurde !
Ainsi $[a, b] \subset V$, ce qui montre que V est un convexe de $\mathbb{R}$. C'est donc un intervalle.

Il reste à montrer que V est fermé et borné pour que ce soit un segment. Le caractère borné vient du caractère borné de la suite :

Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, on a $M > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leqslant M$. Soit $x \in V$. On a alors une suite extraite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers x.
Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{\varphi(n)}| \leqslant M$, en passant à la limite, $|x| \leqslant M$. Ainsi V est borné.

Enfin, on montre que V est fermé en montrant que son complémentaire est ouvert.

Il peut parfois être plus simple de montrer qu'un ensemble est fermé en passant par le complémentaire.

Soit $x \in \mathbb{R}\backslash V$. Alors x n'est pas valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On a alors $\varepsilon > 0$ tel que $\{n \in \mathbb{N}\,;\, |u_n - x| \leqslant \varepsilon\}$ est fini.
Pour $y \in \left]x - \frac{\varepsilon}{2}, x + \frac{\varepsilon}{2}\right[$, on a alors
$$\{n \in \mathbb{N}\,;\, |u_n - y| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\} \subset \{n \in \mathbb{N}\,;\, |u_n - x| \leqslant \varepsilon\}$$
donc ce premier ensemble est fini. Ainsi y n'est pas valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
On a donc $\left]x - \frac{\varepsilon}{2}, x + \frac{\varepsilon}{2}\right[\subset \mathbb{R}\backslash V$ et $\mathbb{R}\backslash V$ est ouvert, donc V est fermé.
En conclusion V est un intervalle réel fermé borné, c'est donc un segment.

2. Pour montrer que la suite converge, il faut montrer qu'elle n'a qu'une valeur d'adhérence. On utilise alors la question précédente.

Comme $(u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un segment $[a, b]$ d'après la question précédente.
Pour $x \in [a, b]$, on a une suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers x. La suite $(u_{\varphi(n)+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors vers $f(x)$ par continuité de f.

D'autre part $(u_{\varphi(n)+1} - u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, donc $x = f(x)$. Ainsi $[a, b]$ est un segment constitué de points fixes de f.
Supposons $a < b$. Comme $c = \dfrac{a+b}{2} \in [a, b]$, il est valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on a $p \in \mathbb{N}$ tel que $|u_p - c| \leqslant \dfrac{b-a}{2}$. Alors $u_p \in [a, b]$ donc est point fixe de f. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc stationnaire et elle converge... absurde puisqu'elle a au moins deux valeurs d'adhérence $a < b$!
Ainsi $a = b$ et la suite a une unique valeur d'adhérence. Elle converge donc.

Exercice 4.14 : Compacité de $O_n(\mathbb{R})$

Démontrer que le groupe orthogonal $O_n(\mathbb{R})$ est compact.

Il s'agit d'une partie de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. L'espace vectoriel étant de dimension finie, on sait que toutes les normes sont équivalentes, on peut donc choisir n'importe quelle norme.
D'autre part, on peut caractériser une matrice orthogonale A de plusieurs façons : par ${}^tAA = \mathrm{I}_n$ ou par les vecteurs colonnes qui sont orthonormés.
Comme la dimension de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est finie, il faut montrer que $O_n(\mathbb{R})$ est un fermé borné.

► $O_n(\mathbb{R})$ **fermé.**

On propose deux démonstrations.

- **Première démonstration :**

  Soit $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $O_n(\mathbb{R})$ qui converge vers un élément A de $M_n(\mathbb{R})$.

  La suite de terme général ${}^tA_pA_p$ est constante égale à I_n, donc on a d'une part $\lim\limits_{p\to+\infty} {}^tA_pA_p = \mathrm{I}_n$.

  Par ailleurs, ${}^tA_pA_p$ tend vers ${}^tAA$, car l'application $(A, B) \mapsto A^TB$ est bilinéaire donc continue.

  Par unicité de la limite il vient ${}^tAA = \mathrm{I}_n$, c'est-à-dire $A \in O_n(\mathbb{R})$.

- **Deuxième démonstration :**

  L'application f de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $f(A) = {}^tAA$ est continue (pour n'importe quelle norme) puisque les coefficients de $f(A)$ sont des fonctions polynomiales des coefficients de A.

  $O_n(\mathbb{R})$ est l'image réciproque par f du fermé $\{\mathrm{I}_n\}$. Il est donc fermé.

Quelle que soit la preuve choisie, il y a un argument de continuité d'une certaine application qu'il faut bien justifier.

▶ $O_n(\mathbb{R})$ **borné.**

Là encore on donne deux démonstrations.

- **Première démonstration :**
  L'application $\varphi : \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2 \to \mathbb{R}$ définie pour $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2$ par
  $$\varphi(A, B) = \operatorname{tr}({}^tAB) = \sum_{i=1}^{n} ({}^tAB)_{i,i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{j,i}b_{j,i}$$
  définit un produit scalaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ (qui correspond au produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^{n^2}$). On note $\| \ \|$ la norme associée.
  Si $A \in O_n(\mathbb{R})$, on a $\|A\| = \sqrt{\operatorname{tr}({}^tAA)} = \sqrt{\operatorname{tr}(I_n)} = \sqrt{n}$, ce qui montre que $O_n(\mathbb{R})$ est borné.
- **Deuxième démonstration :**
  Comme les colonnes d'une matrice orthogonale sont de norme 1, les coefficients d'une matrice orthogonale sont compris entre -1 et 1. $O_n(\mathbb{R})$ est donc borné par 1 pour la norme $\|A\| = \sup_{i,j} |a_{i,j}|$.

Dans tous les cas, $O_n(\mathbb{R})$ est un fermé borné de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, de dimension finie, donc est compact.

Dans chacune de ces démonstrations, on a choisi la norme qui nous arrangeait le plus pour montrer le caractère borné.

Exercice 4.15 : Un fermé borné non compact

Soit E un espace vectoriel normé de dimension infinie. On note S l'ensemble des vecteurs de E de norme 1.
1. Montrer qu'on peut construire une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S^{\mathbb{N}}$ telle que
$$\forall m \neq n \in \mathbb{N}, \quad \|x_n - x_m\| \geqslant \frac{1}{2}.$$
On pourra raisonner par récurrence.
2. En déduire que S est fermée, bornée, mais non compacte.

1. En suivant l'indication, on construit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence. On peut prendre n'importe quel vecteur de norme 1 pour x_0, et si $x_0, \dots, x_n$ sont construits, on regarde $F = \operatorname{Vect}(x_0, \dots, x_n)$. On sait que $F \neq E$, et on souhaite trouver un élément x_{n+1} à distance plus grande que $\frac{1}{2}$ de F. Par analogie avec le cas euclidien, on considère la distance de y (un élément qui n'est pas dans F) à F.

On pose $x_0 \in E$ un vecteur quelconque de norme 1. Supposons avoir construit $x_0, \ldots, x_n$. On note alors $F = \mathrm{Vect}(x_0, \ldots, x_n)$. F est différent de E (car E est de dimension infinie), on a donc $y \in E \backslash F$. Comme F est fermé (puisque c'est un sous-espace de dimension finie),

$$d = d(y, F) = \inf\{\|y - x\| \ , \ x \in F\} > 0.$$

En effet, par caractérisation séquentielle de la borne inférieure, on a $(u_p)_{p \in \mathbb{N}} \in F$ telle que $(\|y - u_p\|)_{p \in \mathbb{N}}$ converge vers d. Si $d = 0$, on aurait $(u_p)_{p \in \mathbb{N}}$ qui converge vers y, donc comme F est fermé, $y \in F$... exclus !

Cette distance d n'est pas forcément atteinte dans le cas général, il faudrait pouvoir extraire une suite convergente de la suite $(u_p)_{p \in \mathbb{N}}$ vue plus haut, donc que F soit compact.

Par caractérisation de la borne inférieure, on peut donc trouver $x \in F$ tel que $\|y - x\| \leqslant 2d$. On pose alors $x_{n+1} = \dfrac{y - x}{\|y - x\|}$, qui est bien de norme 1. Pour $u \in F$, on a

$$\|x_{n+1} - u\| = \left\| \frac{y - x - \|y - x\| \, u}{\|y - x\|} \right\| = \frac{\|y - z\|}{\|y - x\|} \geqslant \frac{d}{\|y - x\|} \geqslant \frac{1}{2}$$

où $z = x + \|y - x\| u \in F$ (car F est stable par combinaison linéaire) donc $\|y - z\| \geqslant d$.

Ainsi, pour $k \in \{0, \ldots, n\}$, comme $x_k \in F$, $\|x_{n+1} - x_k\| \geqslant \frac{1}{2}$, ce qui achève la construction par récurrence.

2. S est clairement bornée et il est facile de montrer qu'elle est fermée. Pour la non compacité, on exploite la question précédente.

S est bornée et comme c'est l'image réciproque de $\{1\}$, fermé de $\mathbb{R}$, par la norme, qui est une application continue, S est fermée.

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite construite dans la question précédente. Supposons que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admette une suite-extraite $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ convergente. Alors la suite $(x_{\varphi(n+1)} - x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0, mais pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|x_{\varphi(n+1)} - x_{\varphi(n)}\| \geqslant \frac{1}{2}$$

ce qui est absurde ! Ainsi S n'est pas compacte.

On a ainsi montré qu'un espace vectoriel normé est de dimension finie si et seulement si sa sphère unité (ou sa boule unité) est compacte.

Exercice 4.16 : Compact et fermé

Dans un espace vectoriel normé E, on considère un compact X et un fermé Y.
1. Démontrer que $X+Y$ est un fermé.
2. On suppose E de dimension finie. Montrer que

$$d(X,Y) = \inf\{\|x-y\|\,;\,(x,y)\in X\times Y\}$$

est atteinte.

1. Pour montrer que $X+Y$ est fermé, on choisit le point de vue des suites (ce qui permettra d'utiliser la compacité).

Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $X+Y$ qui converge vers z dans E. Il faut montrer que $z \in X+Y$.
Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on peut écrire : $z_n = x_n + y_n$ avec $x_n \in X$ et $y_n \in Y$.
Comme X est compact, on peut extraire de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite convergente $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ dont la limite x appartient à X.
La suite extraite $(z_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge encore vers z dans E, donc la suite de terme général $y_{\varphi(n)} = z_{\varphi(n)} - x_{\varphi(n)}$ est donc convergente vers $y = z - x$.
Comme Y est fermé, cette limite appartient à Y.
On a donc $z = x + y \in X + Y$, ce qui prouve que $X+Y$ est fermé.

L'hypothèse X et Y fermés n'entraîne pas que $X+Y$ soit fermé. Pour vous en persuader, représentez dans le plan les parties :

$$X = \{(x,y)\,;\, xy = 1 \text{ et } x > 0\} \qquad Y = \{(x,y)\,;\, x = 0 \text{ et } y \leqslant 0\}$$

2. On exploite la caractérisation séquentielle de la borne inférieure. Comme E est de dimension finie, si on intersecte Y avec une partie bornée de E, on obtiendra un compact.

Par caractérisation séquentielle de la borne inférieure, on a deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in Y^{\mathbb{N}}$ tel que $(\|x_n - y_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\|x-y\|$.
Comme X est compact, on peut extraite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge, disons vers $x \in X$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a alors

$$\|y_{\varphi(n)}\| \leqslant \|x_{\varphi(n)}\| + \|x_{\varphi(n)} - y_{\varphi(n)}\|,$$

qui est le terme général d'une suite convergente vers $\|x\| + d(X,Y)$. Cette suite est donc majorée, disons par M.
La suite $(y_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est donc à valeurs dans $Y \cap B(0,M)$ (où $B(0,M)$ est la boule fermée de centre 0 et de rayon M). C'est un fermé borné de E, de dimension finie, donc un compact. On a donc une suite $(y_{\varphi\circ\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ extraite de $(y_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $y \in Y$.

La suite $(x_{\varphi\circ\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge encore vers x, et $(\|x_{\varphi\circ\psi(n)} - y_{\varphi\circ\psi(n)}\|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\|x-y\|$. Par unicité de la limite, $\|x-y\| = d(X,Y)$ et la distance est atteinte.

Exercice 4.17 : Connexité par arcs

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
1. Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs.
2. Montrer que $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.

1. Si $GL_n(\mathbb{R})$ était connexe par arcs, il en serait de même de son image par toute application continue. On pense alors à étudier $\det(GL_n(\mathbb{R})) = \mathbb{R}^*$.

Supposons $GL_n(\mathbb{R})$ connexe par arcs. Comme $\det$ est continue (car polynomiale en les coefficients), $\det(GL_n(\mathbb{R})) = \mathbb{R}^*$ est connexe par arcs. Il existe donc $h : [0,1] \to \mathbb{R}^*$ continue telle que $h(0) = -1$ et $h(1) = 1$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, on a alors $c \in]0,1[$ tel que $h(c) = 0$. Comme $h(c) \in \mathbb{R}^*$, c'est absurde !
Ainsi $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs.

2. Pour montrer que $GL_n(\mathbb{C})$ est connnexe par arcs, si A et $B \in GL_n(\mathbb{C})$, on doit trouver un chemin continu, inclus dans $GL_n(\mathbb{C})$ reliant A et B.

Pour montrer qu'un ensemble E est connexe par arcs, il suffit de relier (de manière continue) un point particulier de E (qu'on peut choisir) à un élément quelconque de E.

En effet, en prenant ici la matrice I_n, si l'on relie de manière continue A à I_n et B à I_n, en collant ces deux chemins, on aura relié A à B. Pour relier A à I_n de manière continue, on part du segment $t \mapsto tI_n + (1-t)A$ et l'on contourne les points (en nombre fini) où le déterminant s'annule.

Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$. L'application $t \mapsto \det(tI_n + (1-t)A)$ est un polynôme en t (par définition du déterminant) donc a un nombre fini de racines $z_1, \ldots, z_p$ dans $\mathbb{C}$. Comme $\mathbb{C}\backslash\{z_1, \ldots, z_p\}$ est connexe par arcs, on a $f : [0,1] \to \mathbb{C}\backslash\{z_1, \ldots, z_p\}$ continue telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.
Pour tout $t \in [0,1]$, $f(t) \notin \{z_1, \ldots, z_n\}$, donc $\det(f(t)I_n + (1-f(t))A) \neq 0$ et $f(t)I_n + (1-f(t))A \in GL_n(\mathbb{C})$. Par suite,

$$h : [0,1] \to GL_n(\mathbb{C}), \quad t \mapsto f(t)I_n + (1-f(t))A$$

est bien définie, continue (car f l'est) et $h(0) = A$, $h(1) = I_n$.

Le fait de montrer que tout élément de $GL_n(\mathbb{C})$ puisse être relié à I_n montre que $GL_n(\mathbb{C})$ possède une seule composante connexe par arcs, donc est connexe par arcs.

CHAPITRE

5

Fonctions vectorielles et arcs paramétrés

Ce chapitre est également l'occasion de revoir l'analyse réelle de première année. Les exercices 1 et 3 sont à prendre dans ce sens.

Exercice 5.1 : Approximation d'une fonction par interpolation

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^n$, $a_1, \ldots, a_n$ n points de $[a, b]$ deux à deux distincts.
1. Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, $f(a_i) = P(a_i)$.
2. Pour $x \in [a, b]$ distinct des a_i, on pose $\varphi : t \mapsto f(t) - P(t) - \lambda S(t)$, où

$$S = \prod_{i=1}^{n}(X - a_i),$$

λ étant choisi de sorte que $\varphi(x) = 0$. Montrer que $\exists c \in [a, b]$, $\varphi^{(n)}(c) = 0$.
3. En déduire que

$$\forall x \in [a, b], \quad |f(x) - P(x)| \leqslant \frac{|S(x)|}{n!}\|f^{(n)}\|_\infty.$$

1. Pour trouver un polynôme P qui a des valeurs déterminées en $a_1, \ldots, a_n$, on peut utiliser l'interpolation de Lagrange : on construit les polynômes $L_1, \ldots, L_n$ vérifiant $L_i(a_j) = \delta_{i,j}$ et on trouve P comme combinaison linéaire de ces L_i.

Pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, on pose

$$L_i = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{X - a_j}{a_i - a_j},$$

de sorte que $L_i(a_j) = \delta_{i,j}$ (symbole de Kronecker : 0 si $i \neq j$ et 1 si $i = j$) et $\deg(L_i) = n - 1$.
Posons alors $P = \sum\limits_{k=1}^{n} f(a_k)L_k$. Pour i entre 1 et n, on a

$$P(a_i) = \sum_{k=1}^{n} f(a_k)L_k(a_i) = f(a_i),$$

ce que l'on voulait.

2. Comme λ est choisi de sorte que $\varphi(x) = 0$ (il faudra justifier que c'est possible), φ s'annule au total $n+1$ fois : en tous les a_i et en x.
Le théorème de Rolle permet alors de montrer que φ' s'annule n fois, puis que φ'' s'annule $n-1$ fois, et ainsi de suite, jusqu'à $\varphi^{(n)}$ qui s'annule au moins une fois (c'est le classique entonnoir de Rolle). On rédige ceci rigoureusement par récurrence.
Notons que $\varphi(x) = 0$ équivaut à $f(x) - P(x) = \lambda S(x)$, ce qui montre qu'on doit poser $\lambda = \frac{f(x)-P(x)}{S(x)}$.

Notons que comme $x \notin \{a_1, \ldots, a_n\}$, $S(x) \neq 0$. On peut alors poser
$$\lambda = \frac{f(x) - P(x)}{S(x)},$$
de sorte que $f(x) - P(x) = \lambda S(x)$, soit $\varphi(x) = 0$.
On montre alors par récurrence sur $k \in \{0, \ldots, n\}$ la propriété $\mathscr{P}(k)$:
« $\varphi^{(k)}$ s'annule au moins $n - k + 1$ fois sur $[a, b]$. »

- Pour i entre 1 et n, $\varphi(a_i) = f(a_i) - P(a_i) - \lambda S(a_i) = 0$. De plus $\varphi(x) = 0$ donc φ s'annule au moins $n+1$ fois sur $[a, b]$, et on a $\mathscr{P}(0)$.
- Soit $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ tel que $\mathscr{P}(k)$. Par hypothèse de récurrence, $\varphi^{(k)}$ s'annule au moins $n - k + 1$ fois sur $[a, b]$, disons en $c_0 < \ldots < c_{n-k}$.
  Pour i entre 0 et $n-k$, $\varphi^{(k)}$ est continue sur $[c_i, c_{i+1}]$, dérivable sur $]c_i, c_{i+1}[$ (comme combinaison linéaire de fonctions qui le sont, f étant de classe $\mathscr{C}^n$) et $\varphi^{(k)}(c_i) = 0 = \varphi^{(k)}(c_{i+1})$.
  Par le théorème de Rolle, on a $d_i \in]c_i, c_{i+1}[$ tel que $\varphi^{(k+1)}(d_i) = 0$. $\varphi^{(k+1)}$ s'annule donc en $d_0 < \cdots < d_{n-k-1}$, donc au moins $n - k$ fois, et on a $\mathscr{P}(k)$.

En conclusion, on a $\forall k \in \{0, \ldots, n\}$, $\mathscr{P}(k)$, et en particulier $\mathscr{P}(n)$: $\varphi^{(n)}$ s'annule donc au moins une fois sur $[a, b]$.

3. Si x est distinct des a_i, on applique la question précédente pour obtenir λ en fonction de $f^{(n)}$, l'inégalité se montre alors facilement à partir de l'identité $\varphi(x) = 0$.

Il ne faudra pas oublier de distinguer le cas que la question précédente ne permet pas de traiter.

Supposons tout d'abord x distinct des a_i.
D'après la question précédente, on a $c \in [a, b]$ tel que $\varphi^{(n)}(c) = 0$.
Comme $\deg(P) \leqslant n - 1$, $P^{(n)} = 0$. Comme S est unitaire et de degré n, $S^{(n)} = n!$. Ainsi $0 = \varphi^{(n)}(c) = f^{(n)}(c) - \lambda n!$ et $\lambda = \dfrac{f^{(n)}(c)}{n!}$.

En reprenant l'égalité $\varphi(x) = 0$, on a donc $f(x) = P(x) + \dfrac{f^{(n)}(c)}{n!} S(x)$. Comme $f^{(n)}$ est continue sur le segment $[a, b]$, elle y est bornée, et on peut considérer $\|f^{(n)}\|_\infty$.
On a alors

$$|f(x) - P(x)| = \frac{\left|f^{(n)}(c)\right|}{n!} |S(x)| \leqslant \frac{\|f^{(n)}\|_\infty}{n!} |S(x)| .$$

Si maintenant pour i entre 1 et n, $x = a_i$, alors $f(x) - P(x) = 0$ donc l'égalité reste vérifiée.

Exercice 5.2 : Calcul d'un déterminant par dérivation

Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ on pose

$$D_n(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & & & 0 \\ x^2/2! & x & 1 & & \\ x^3/3! & x^2/2! & x & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ x^n/n! & \dots & \dots & x^2/2 & x \end{vmatrix} .$$

1. Justifier que D_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.
2. En déduire une expression de D_n.

1. Pour justifier la dérivabilité et calculer la dérivée du déterminant, on utilise la multilinéarité : si chaque colonne est une fonction dérivable de x, le déterminant le sera.
On calcule la dérivée en faisant la somme des déterminants obtenus en dérivant l'une des colonnes et en fixant les $n-1$ autres (ce qui généralise la dérivée d'une application bilinéaire, comme le produit).

Comme pour le produit, la dérivée de $\det(C_1(t), \dots, C_n(t))$ n'est pas $\det(C_1'(t), \dots, C_n'(t))$!

Pour $i \in \{1, \dots, n\}$, notons $C_i : x \mapsto$ la i-ème colonne de $D_n(x)$.
Chacune des coordonnées de C_i est une fonction polynomiale de x, donc est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$C_i'(x) = C_{i+1}(x) \text{ si } i \leqslant n-1 \quad \text{et} \quad C_n'(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Ainsi $D_n = \det(C_1, \ldots, C_n)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (par n-linéarité du déterminant) et pour $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} D_n'(x) &= \sum_{i=1}^{n} \det(C_1(x), \ldots, C_{i-1}(x), C_i'(x), C_{i+1}(x), \ldots, C_n(x)) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \det(C_1(x), \ldots, C_{i-1}(x), C_{i+1}(x), C_{i+1}(x), \ldots, C_n(x)) \\ &\quad + \det(C_1(x), \ldots, C_{n-1}(x), C_n'(x)) \\ &= D_{n-1}(x) \end{aligned}$$

puisque tous les déterminants de la somme sont nuls (d'après le caractère alterné du déterminant) et en développant par rapport à la dernière colonne le dernier déterminant.

2. La question précédente nous dit que $D_n' = D_{n-1}$. On calcule facilement $D_n(0) = 0$ (pour évaluer la constante d'intégration).
Comme $D_1(x) = x$, on a donc $D_2(x) = \frac{x^2}{2}$, puis $D_3(x) = \frac{x^3}{6}$ et plus généralement, on intuite que $D_n(x) = \frac{x^n}{n!}$, ce qu'on va prouver rigoureusement par récurrence.

Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ la propriété $\mathscr{P}(n)$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad D_n(x) = \frac{x^n}{n!}.$$

- On a clairement $\mathscr{P}(1)$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathscr{P}(n)$. Comme $D_{n+1}' = D_n$, on a $c \in \mathbb{R}$ tel que

  $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad D_{n+1}(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + c$$

  par hypothèse de récurrence.
  Or $D_n(0)$ est un déterminant triangulaire supérieur avec des 0 sur la diagonale, donc $D_n(0) = 0$. Ainsi $c = 0$ et on a $\mathscr{P}(n+1)$, ce qui conclut la récurrence.

Exercice 5.3 : Une application des formules de Taylor

Soient $a > 0$ et $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$. On note $M = \sup_{t \in [-a,a]} |f''(t)|$.
1. Montrer que

$$\forall x \in [-a, a], \quad |f'(x)| \leqslant \frac{1}{2a}|f(a) - f(-a)| + \frac{a^2 + x^2}{2a} M.$$

2. En déduire que pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin x \geqslant x \cos x - x^2$.

1. Pour faire le lien entre f, f' et f'', il faut utiliser une formule de Taylor. On choisit ici la formule de Taylor avec reste intégral, qu'on va devoir appliquer plusieurs fois : entre a et x pour avoir le lien entre $f(a)$ et $f'(x)$; entre $-a$ et x pour avoir le lien entre $f(-a)$ et $f'(x)$.

On peut appliquer la formule de Taylor avec reste intégral entre a et b même si $a > b$.

Soit $x \in [-a, a]$. Comme f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[x, a]$, on a

$$f(a) = f(x) + (a - x)f'(x) + \int_x^a (a - t)f''(t)\,\mathrm{d}t$$

et comme elle est $\mathscr{C}^2$ sur $[-a, x]$, on a

$$f(-a) = f(x) + (-a - x)f'(x) + \int_x^{-a} (-a - t)f''(t)\,\mathrm{d}t.$$

Attention à ne pas s'emmêler les pinceaux entre les deux bornes, la première borne de l'intégrale est ce qu'il y a dans les valeurs de f, f' etc, la seconde, ce qu'il y a dans l'autre membre.

Ainsi

$$\begin{aligned} f(a) - f(-a) &= 2af'(x) + \int_x^a (a - t)f''(t)\,\mathrm{d}t - \int_x^{-a} (-a - t)f''(t)\,\mathrm{d}t \\ &= 2af'(x) + \int_x^a (a - t)f''(t)\,\mathrm{d}t - \int_{-a}^{x} (a + t)f''(t)\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Par suite, il vient

$$\begin{aligned} |f'(x)| &= \frac{1}{2a}\left|f(a) - f(-a) - \int_x^a (a - t)f''(t)\,\mathrm{d}t + \int_{-a}^{x} (a + t)f''(t)\,\mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant \frac{1}{2a}|f(a) - f(-a)| + \frac{1}{2a}\int_x^a (a - t)|f''(t)|\,\mathrm{d}t \\ &\quad + \frac{1}{2a}\int_{-a}^{x} (a + t)|f''(t)|\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}|f'(x)| &\leqslant \frac{1}{2a}|f(a)-f(-a)| + \frac{1}{2a}\int_x^a (a-t)M\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2a}\int_{-a}^x (a+t)M\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant \frac{1}{2a}|f(a)-f(-a)| + \frac{(a-x)^2+(x+a)^2}{4a}M \\ &\leqslant \frac{1}{2a}|f(a)-f(-a)| + \frac{a^2+x^2}{2a}M\end{aligned}$$

2. Il faut trouver à quelle fonction appliquer la question précédente. Vu la forme de l'énoncé, on pense à $f = \cos$ ou $f = \sin$. Comme cos est paire, $f(a) - f(-a)$ serait nul si $f = \cos$, on prend donc $f = \sin$.
On utilise ensuite $a = x$.

Posons $f = \sin$, de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. Alors $|f''|$ est majorée par $M = 1$, donc pour $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a, par la question précédente,

$$|\cos(x)| \leqslant \frac{1}{2x}|\sin(x) - \sin(-x)| + \frac{2x^2}{2x}$$

et donc, comme $x > 0$, $x\cos x \leqslant \sin x + x^2$.
Ainsi $\sin x \geqslant x\cos x - x^2$.
Cette inégalité reste clairement vraie pour $x = 0$.

Exercice 5.4 : Réflexion sur une ellipse

Une ellipse est une courbe paramétrée de la forme $t \mapsto (a\cos t, b\sin t)$, avec $a > b > 0$.
On note

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}},$$

F_1, F_2 les points de coordonnées $(ae, 0)$ et $(-ae, 0)$ (appelés foyers de l'ellipse).
On note enfin D_1 et D_2 les droites d'équations $x = \dfrac{a}{e}$ et $x = -\dfrac{a}{e}$.
1. Pour $t \in \mathbb{R}$, on note $H_1(t)$ et $H_2(t)$ les projetés orthogonaux de M sur D_1 et D_2. Montrer que $F_1M(t) = eM(t)H_1(t)$ et $F_2M(t) = eM(t)H_2(t)$.
2. En déduire que $\forall t \in \mathbb{R}$, $F_1M(t) + F_2M(t) = 2a$.
3. En déduire qu'en tout point $M(t)$ de l'ellipse, la normale est la bissectrice intérieure de l'angle formé par $\overrightarrow{M(t)F_1}$ et $\overrightarrow{M(t)F_2}$.

1. Les droites D_1 et D_2 sont verticales, on trouve donc facilement les coordonnées de $H_1(t)$ et $H_2(t)$: ils ont même ordonnées que $M(t)$, mais pour abscisse $\pm\frac{a}{e}$. Le calcul se fait alors aisément.

Pour $t \in \mathbb{R}$, $H_1(t)$ a pour coordonnées $\left(\frac{a}{e}, b\sin t\right)$ et $H_2(t)$ a pour coordonnées $\left(-\frac{a}{e}, b\sin t\right)$. Ainsi

$$\begin{aligned} e^2 M(t)H_1(t)^2 = e^2\left(\frac{a}{e} - a\cos t\right)^2 &= a^2 - 2a^2 e\cos t + a^2e^2\cos^2 t \\ &= a^2 - 2a^2e\cos t + a^2\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)\cos^2 t \\ &= a^2(1+\cos^2 t) - 2a^2 e\cos t - b^2\cos^2 t \end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned} F_1M(t)^2 &= (a\cos t - ae)^2 + (b\sin t)^2 \\ &= a^2\cos^2 t - 2a^2e\cos t + a^2e^2 + b^2\sin^2 t \\ &= a^2\cos^2 t - 2a^2e\cos t + a^2 - b^2 + b^2\sin^2 t \\ &= a^2(1+\cos^2 t) - 2a^2e\cos t - b^2\cos^2 t \end{aligned}$$

donc $F_1M(t)^2 = e^2M(t)H_1(t)^2$, puis en passant à la racine, on en déduit que $F_1M(t) = eM(t)H_1(t)$. On montre de même que $F_2M(t) = eM(t)H_2(t)$.

2. On utilise la question précédente, couplée avec le fait que $H_1(t)$, $M(t)$ et $H_2(t)$ sont alignés (sur une même droite horizontale).

Pour $t \in \mathbb{R}$, $H_2(t)$, $M(t)$ et $H_1(t)$ ont même ordonnée, et pour abscisses respectives $-\frac{a}{e} < a\cos t < \frac{a}{e}$ (car $e < 1$).
Ils sont donc alignés dans ce sens, et on a

$$H_2(t)M(t) + M(t)H_1(t) = H_2(t)H_1(t) = \frac{2a}{e}.$$

Ainsi, avec la question précédente,

$$F_1M(t) + F_2M(t) = e(M(t)H_1(t) + M(t)H_2(t)) = e\frac{2a}{e} = 2a.$$

En fixant les deux extrémités d'une corde de longueur $2a$ en F_1 et F_2, et en la tendant, on peut donc tracer l'ellipse considérée.

3. On reprend la relation de la question précédente qu'on va dériver pour faire apparaître un vecteur $\overrightarrow{M}'(t)$ (qui est à la fois la dérivée de $\overrightarrow{F_1M(t)}$ et de $\overrightarrow{F_2M(t)}$).
Cette dérivée donne deux produits scalaires, que l'on va regrouper.

Lorsqu'on a une courbe $t \mapsto M(t)$, le vecteur $\overrightarrow{M}'(t)$ est la dérivée de n'importe quelle fonction du type $t \mapsto \overrightarrow{AM(t)}$.

Pour $t \in \mathbb{R}$, on a, par le 2, $F_1M(t) + F_2M(t) = 2a$. En dérivant, il vient :

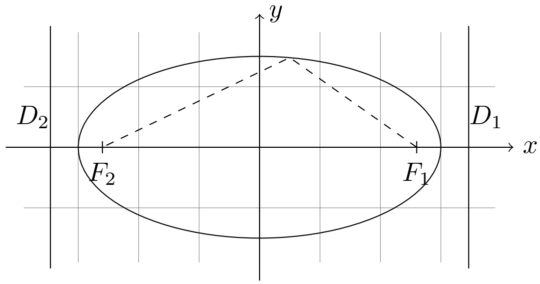
$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\left\langle \overrightarrow{M}'(t) \middle| \overrightarrow{F_1M(t)} \right\rangle}{F_1M(t)} + \frac{\left\langle \overrightarrow{M}'(t) \middle| \overrightarrow{F_2M(t)} \right\rangle}{F_2M(t)} \\ &= \left\langle \overrightarrow{M}'(t) \middle| \frac{\overrightarrow{F_1M(t)}}{F_1M(t)} + \frac{\overrightarrow{F_2M(t)}}{F_2M(t)} \right\rangle \end{aligned}$$

Notons

$$\overrightarrow{u}(t) = \frac{\overrightarrow{F_1M(t)}}{F_1M(t)} + \frac{\overrightarrow{F_2M(t)}}{F_2M(t)}.$$

Il s'agit de la somme d'un vecteur directeur unitaire de $(F_1M(t))$ et d'un vecteur directeur unitaire de $(F_2M(t))$. C'est donc un vecteur unitaire de la diagonale du parallélogramme construit sur ces droites, avec des côtés tous égaux à 1. Comme ce parallélogramme est en fait un losange, cette diagonale est la bissectrice de l'angle formé par $\overrightarrow{M(t)F_1}$ et $\overrightarrow{M(t)F_2}$. Comme son vecteur directeur est orthogonal à $\overrightarrow{M}'(t)$ d'après ce qui précède, et comme cette droite passe par $M(t)$, il s'agit également de la normale à l'ellipse en ce point.

Physiquement ce phénomène signifie qu'un rayon lumineux (ou une onde sonore) issu du premier foyer, et qui se reflète sur la surface de l'ellipse, arrive au second foyer.



Exercice 5.5 : Tracé de la cardioïde

Le but de cet exercice est de réaliser le tracé de la courbe

$$M : t \mapsto (x(t), y(t)) = (\cos t(1 + \cos t), \sin t(1 + \cos t)).$$

1. Montrer que l'on peut réduire le domaine d'étude à $[0, \pi]$ en expliquant la ou les symétrie(s) à effectuer.
2. Montrer que O est l'unique point stationnaire. En constatant que $(\cos t, \sin t)$ est un vecteur directeur de la droite $(OM(t))$ pour $t \in]0, \pi]$, en déduire la tangente en O.
3. Donner l'allure de la courbe M.

1. Pour réduire le domaine d'étude, on étudie les propriétés de parité et de périodicité de x et y.

x et y étant 2π-périodiques, on commence par restreindre l'étude à $[-\pi, \pi]$ (ce qui trace la courbe complète puisque $M(t + 2\pi) = M(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$).
x est paire et y est impaire. Ainsi $M(-t)$ est le symétrique de $M(t)$ par rapport à l'axe des abscisses. On restreint l'étude à $I = [0, \pi]$, et on fera une symétrie par rapport à cet axe.

Lorsqu'une transformation de t laisse x et y invariant, ou change l'une, l'autre ou les deux en son opposé, on peut restreindre le domaine d'étude de moitié et il y aura une symétrie (axiale ou par rapport à l'origine) à effectuer.

2. Pour déterminer les points stationnaires de M, on cherche les $t \in [0, \pi]$ où x' et y' s'annulent simultanément. Les autres points sont tous réguliers.

Notons que x et y sont dérivables sur $\mathbb{R}$ comme produits et combinaisons linéaires de fonctions qui le sont. Pour $t \in [0, \pi]$, on a

$$x'(t) = -\sin t - 2\sin t \cos t = -\sin t(1 + 2\cos t)$$

donc x' s'annule en 0, $\dfrac{2\pi}{3}$ et π sur $[0, \pi]$. D'autre part

$$y'(t) = \cos t + \cos^2 t - \sin^2 t = \cos t + 2\cos^2 t - 1.$$

Le trinôme $2X^2 + X - 1$ a pour discriminant 9 et pour racines $\dfrac{-1+3}{4} = \dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{-1-3}{2} = -1$. Ainsi y' s'annule en $\dfrac{\pi}{3}$ et en π.
En conclusion, le seul point stationnaire de M sur $[0, \pi]$ est $M(\pi) = O$.

En un point stationnaire, on est obligé de revenir à la définition géométrique pour déterminer la tangente. Il faut trouver une famille de vecteurs directeurs des droites $(M(\pi)M(t))$ qui admet une limite non nulle quand $t \to \pi$. Cette limite est alors un vecteur directeur de la tangente. Ici l'énoncé nous simplifie la tâche avec une indication.

Le vecteur $\vec{u}(t) = (\cos t, \sin t)$ est colinéaire à $\overrightarrow{OM(t)} = \overrightarrow{M(\pi)M(t)}$ donc dirige la droite $(M(\pi)M(t))$. Quand $t \to \pi$, $\vec{u}(t) \to (-1, 0)$ donc la tangente à la courbe en $M(\pi)$ est horizontale.

3. Pour pouvoir déterminer l'allure de la courbe M, on commence par faire un tableau de variations conjoint de x et y. On reprend pour cela le calcul des dérivées effectué dans la question précédente.

Pour $t \in [0, \pi]$, on a $x'(t) = -\sin t(1 + 2\cos t) \leqslant 0$ si $t \in \left[0, \dfrac{2\pi}{3}\right]$, et $x'(t) \geqslant 0$ si $t \in \left[\dfrac{2\pi}{3}, \pi\right]$.

De même, on a vu que $y'(t) = \cos t + 2\cos^2 t - 1$. Le trinôme $2X^2 + X - 1$ est négatif entre ses racines et positif à l'extérieur. On a donc $2x^2 + x - 1 \leqslant 0$ si $x \in \left[-1, \dfrac{1}{2}\right]$, $\geqslant 0$ sinon. Par suite, $y'(t) \geqslant 0$ si $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{3}\right]$ et $y'(t) \leqslant 0$ si $t \in \left[\dfrac{\pi}{3}, \pi\right]$ (par décroissance de $\cos$ sur $[0, \pi]$).

On en déduit le tableau de variations suivant.

t	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
$x'(t)$	0	$-$	$-\sqrt{3}$	$-$	0	$+$	0
x	2	$\searrow$			$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	0
$y'(t)$	-1	$+$	0	$-$	-1	$-$	0
y	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$			0

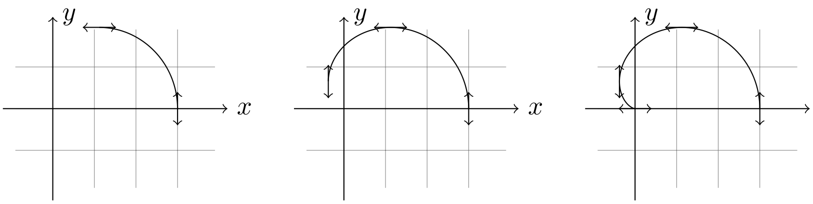
En $M(0) = (2, 0)$, on a $M'(0) = (0, -1)$, donc la courbe a une tangente verticale.

En $M\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \left(\dfrac{3}{4}, \dfrac{3\sqrt{3}}{4}\right)$, on a $M'\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = (-\sqrt{3}, 0)$ donc la courbe a une tangente horizontale.

En $M\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = \left(-\dfrac{1}{4}, \dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$, on a $M'\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = (0, -1)$ donc la courbe a une tangente verticale.

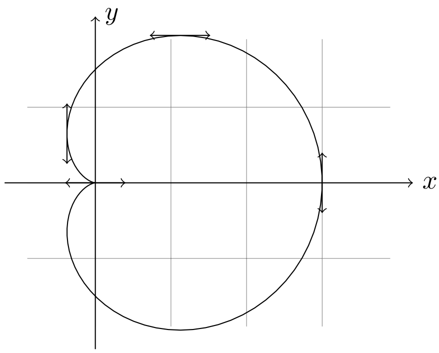
Enfin, en $M(\pi) = (0, 0)$, on a vu dans la question précédente que la tangente est horizontale.

À ce stade, on trace la courbe en reliant ces quatre points particuliers. On part de $M(0)$ et on rejoint $M(\frac{\pi}{3})$ en décroissant les abscisses et augmentant les ordonnées, avec les deux tangentes déterminées.
Ensuite on relie $M(\frac{\pi}{3})$ à $M(\frac{2\pi}{3})$ en décroissant les abscisses et les ordonnées. Enfin on relie $M(\frac{2\pi}{3})$ à $M(\pi)$ avec des ordonnées décroissantes et des abscisses croissantes.



Une fois ceci effectué, il ne faut pas oublier d'appliquer la symétrie par rapport à l'axe des abscisses.

On peut alors tracer la courbe (appelée cardioïde)



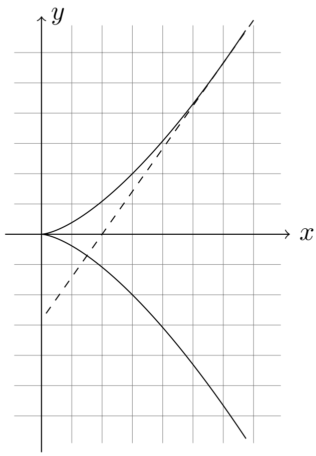
Exercice 5.6 : Droites tangentes et normales

Dans le plan euclidien rapporté à un repère orthonormal, on considère la courbe paramétrée $\mathscr{C}$ $(t \in \mathbb{R})$:

$$x(t) = 3t^2$$
$$y(t) = 2t^3.$$

Déterminer les droites qui sont à la fois tangentes et normales à $\mathscr{C}$.

On peut construire rapidement la courbe pour avoir une idée du problème posé.



On considère ensuite la tangente en un point $M(t)$, et on cherche si elle a un autre point d'intersection avec $\mathscr{C}$, où elle serait normale.

Les fonctions x et y sont dérivables en tout point de $\mathbb{R}^2$.
Pour $t \in \mathbb{R}$, on a $x'(t) = 6t$ et $y'(t) = 6t^2$, tout point de $\mathscr{C}$ tel que $t \neq 0$ est régulier et la tangente en $M(t)$ a pour vecteur directeur $\begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$.
En 0, on a $x(t) = 3t^2 + o(t^3)$ et $y(t) = 2t^3 + o(t^3)$, donc

$$\frac{y(t)}{x(t)} \sim \frac{2t^3}{3t^2} = \frac{2t}{3} \xrightarrow[t \to 0]{} 0.$$

La tangente en $M(0)$ est donc horizontale, et a pour vecteur directeur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
La tangente D_t en $M(t)$ admet une équation de la forme $tX - Y + c = 0$. En reportant les coordonnées de $M(t)$, on trouve

$$c = -t(3t^2) + 2t^3 = -t^3$$

donc l a tangente D_t en $M(t)$ admet pour équation :

$$tX - Y - t^3 = 0.$$

Si D_t recoupe $\mathscr{C}$ en $N(u)$, le paramètre u vérifie l'équation :

$$3tu^2 - 2u^3 - t^3 = 0.$$

Le polynôme en u du premier membre est de degré 3 et il admet t comme racine double puisque la droite est tangente en $M(t)$. On peut donc le factoriser et l'équation précédente s'écrit :

$$(u - t)^2(2u + t) = 0.$$

La droite D_t recoupe donc $\mathscr{C}$ en $N(-t/2)$. Elle est normale à $\mathscr{C}$ en ce point si, et seulement si, les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -t/2 \end{pmatrix}$ sont orthogonaux, donc si $t^2 = 2$.

Les deux droites qui sont à la fois normales et tangentes à $\mathscr{C}$ admettent donc pour équations respectives :

$$y = \sqrt{2}(x-2) \qquad\qquad y = -\sqrt{2}(x-2).$$

Partie 3

Analyse

Analyse

CHAPITRE 6

Fonctions convexes

Exercice 6.1 : Inégalité arithmético-géométrique

1. Montrer que ln est concave.
2. En déduire que pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$,

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}} \leqslant \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leqslant \frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n).$$

1. Quand, en pratique, on doit montrer qu'une fonction explicite est convexe ou concave, on calcule le signe de sa dérivée seconde.

Ce doit être un réflexe, au même titre que l'on calcule le signe de la dérivée pour avoir la monotonie.

La fonction ln est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$\ln'(x) = \frac{1}{x} \qquad \text{puis} \qquad \ln''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0.$$

Ainsi ln est concave.

2. Vu la première question, on tente de passer au ln les inégalités à démontrer. La seconde devient :

$$\frac{1}{n}(\ln(x_1) + \cdots + \ln(x_n)) \leqslant \ln\left(\frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n)\right)$$

et la première :

$$-\ln\left(\frac{1}{n}\left(\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right)\right) \leqslant \frac{1}{n}(\ln(x_1) + \cdots + \ln(x_n)).$$

On reconnait alors rapidement des inégalités de concavité, avec $t_1 = \cdots = t_n = \frac{1}{n}$ (qui sont des réels positifs dont la somme vaut 1).

Soit $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$. Comme $\ln$ est concave, on a, si $(t_1, \dots, t_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$ vérifie $t_1 + \dots + t_n = 1$,

$$\ln(t_1\, x_1 + \dots + t_n\, x_n) \geqslant t_1\, \ln(x_1) + \dots + t_n\, \ln(x_n).$$

En prenant $t_1 = \dots = t_n = \dfrac{1}{n}$, il vient,

$$\ln(\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}) = \frac{1}{n}(\ln(x_1) + \dots + \ln(x_n)) \leqslant \ln\left(\frac{1}{n}(x_1 + \dots + x_n)\right).$$

Par croissance de la fonction exponentielle, on en déduit que

$$\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leqslant \frac{1}{n}(x_1 + \dots + x_n).$$

D'autre part, on a (toujours par concavité de $\ln$) :

$$\frac{1}{n}(\ln\left(\frac{1}{x_1}\right) + \dots + \ln\left(\frac{1}{x_n}\right)) \leqslant \ln\left(\frac{1}{n}\left(\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n}\right)\right).$$

Ainsi

$$-\ln\left(\frac{1}{n}\left(\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n}\right)\right) \leqslant \frac{1}{n}(\ln(x_1) + \dots + \ln(x_n)) = \ln(\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}).$$

Par croissance de la fonction exponentielle, on en déduit que

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n}} \leqslant \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}.$$

Exercice 6.2 : Inégalités de Hölder et de Minkowski

On se fixe p et q deux réels > 0 tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

1. Montrer que pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $xy \leqslant \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q$.

2. Pour $x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n \in \mathbb{R}_+^*$ quelconques, montrer l'inégalité de Hölder :

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^n x_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n y_i^q\right)^{1/q}.$$

On pourra se ramener au cas où $\sum\limits_{i=1}^n x_i^p = \sum\limits_{i=1}^n y_i^q = 1$.

3. On suppose $p > 1$. Déduire de l'inégalité de Hölder l'inégalité de Minkowski :

$$\left(\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{i=1}^n x_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^n y_i^p\right)^{1/p}.$$

1. Le fait que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ doit faire penser à la convexité, il faut alors trouver la fonction convexe associée.

Le changement d'une somme (dans l'inégalité de droite) au produit (dans l'inégalité de gauche) invite à utiliser ln. L'inégalité à montrer est alors

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y) \leqslant \ln\left(\frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q\right).$$

La dernière étape est alors de transformer $\ln(x)$ en $\frac{1}{p}\ln(x^p)$ et $\ln(y)$ en $\frac{1}{q}\ln(y^q)$.

Comme ln est concave (cf exercice **6.1**) et comme $\dfrac{1}{q} = 1 - \dfrac{1}{p}$, avec $\dfrac{1}{p} \in [0,1]$, on a, pour $(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$:

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y) = \frac{1}{p}\ln(x^p) + \frac{1}{q}\ln(y^q) \leqslant \ln\left(\frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q\right).$$

Par croissance de la fonction exponentielle, on en déduit que

$$xy \leqslant \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q.$$

2. Pour se ramener au cas donné en indication, il faut « unitariser » les vecteurs : comme dans le cas euclidien (si $p = 2$), on divise les vecteurs x et y par leur « norme ».

On note

$$N_p = \left(\sum_{i=1}^n x_i^p\right)^{1/p} \quad \text{et } N_q = \left(\sum_{i=1}^n y_i^q\right)^{1/q}.$$

On pose ensuite $\tilde{x_i} = \dfrac{x_i}{N_p}$ et $\tilde{y_i} = \dfrac{y_i}{N_q}$ pour tout i entre 1 et n. On a alors :

$$\sum_{i=1}^n \tilde{x_i}^p = \frac{1}{N_p^p}\sum_{i=1}^n x_i^p = 1 \text{ et } \sum_{i=1}^n \tilde{y_i}^q = \frac{1}{N_q^q}\sum_{i=1}^n y_i^q = 1.$$

Ainsi, par la question précédente

$$\sum_{i=1}^n \tilde{x_i}\tilde{y_i} \leqslant \frac{1}{p}\sum_{i=1}^n \tilde{x_i}^p + \frac{1}{q}\sum_{i=1}^n \tilde{y_i}^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

En multipliant cette inégalité par $N_pN_q > 0$, on a donc :

$$\sum_{i=1}^n x_iy_i \leqslant N_pN_q = \left(\sum_{i=1}^n x_i^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^n y_i^q\right)^{1/q}.$$

Lors de la manipulation d'inégalités, il faut toujours bien vérifier le signe des réels par lesquels on souhaite multiplier.

Cette inégalité généralise celle de Cauchy-Schwarz dans $E = \mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne usuelle : il suffit de prendre $p = q = 2$.

3. Pour pouvoir appliquer l'inégalité précédente, on pose $q = \frac{1}{1-1/p}$, de sorte que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. On utilise ensuite l'hypothèse $p > 1$ pour séparer $(x_i + y_i)^p$ en deux termes : $x_i\,(x_i + y_i)^{p-1}$ et $y_i\,(x_i + y_i)^{p-1}$. On applique alors l'inégalité de Hölder à chacun de ces deux termes.

Notons tout d'abord que

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^p = \sum_{i=1}^{n} x_i(x_i + y_i)^{p-1} + \sum_{i=1}^{n} y_i(x_i + y_i)^{p-1}.$$

En posant $q = \dfrac{1}{1 - 1/p} = \dfrac{p}{p-1} > 0$ car $p > 1$, on a $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. On applique alors l'inégalité de Hölder pour obtenir :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} x_i(x_i + y_i)^{p-1} &\leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^{q(p-1)}\right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^{p}\right)^{\frac{1}{q}}\end{aligned}$$

De même, on obtient :

$$\sum_{i=1}^{n} y_i(x_i + y_i)^{p-1} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^{p}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

En sommant, il vient :

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^p \leqslant \left(\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\right) \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^{p}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Ainsi, en multipliant par

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^p\right)^{-\frac{1}{q}} > 0,$$

on a finalement :

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^p\right)^{1-\frac{1}{q}} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Exercice 6.3 : Continuité des fonctions convexes

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe.
1. Montrer que pour $(x, y, z) \in I^3$ tel que $x < y < z$, on a

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leqslant \frac{f(z)-f(y)}{z-y}.$$

2. Pour $a \in I$, on définit τ sur $I \backslash \{a\}$, par

$$\tau(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

Montrer que τ admet des limites finies à gauche et à droite en a.
3. En déduire que f est continue.

1. Pour pouvoir utiliser l'hypothèse de convexité, il faut écrire l'une des variables sous la forme d'un barycentre à coefficients positifs des deux autres. La seule manière de faire ceci est d'écrire y sous la forme $tx + (1-t)z$ (possible car $y \in [x, z]$).
On isole alors $t = \frac{z-y}{z-x}$. Les inégalités à montrer vont ensuite se déduire de

$$f(tx + (1-t)y) \leqslant tf(x) + (1-t)f(z),$$

qui compare $f(y)$, $f(x)$ et $f(z)$.

Posons $t = \dfrac{z-y}{z-x}$, de sorte que $y = tx + (1-t)z$. Comme $y \in [x, z]$, $t \in [0, 1]$: en effet $0 \leqslant z - y \leqslant z - x$.
Par convexité de f, on a alors

$$f(y) = f(tx + (1-t)z) \leqslant tf(x) + (1-t)f(z).$$

On a donc $f(y) - f(x) \leqslant (1-t)(f(z) - f(x))$ et comme $1 - t = \frac{y-x}{z-x}$, en divisant par $y - x > 0$, il vient :

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant \frac{f(z)-f(x)}{z-x}.$$

L'inégalité de convexité donne également $-tf(x) + tf(z) \leqslant f(z) - f(y)$, donc $t(f(z) - f(x)) \leqslant f(z) - f(y)$. En divisant par $z - y > 0$, on obtient :

$$\frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leqslant \frac{f(z)-f(y)}{z-y}.$$

Ceci constitue l'inégalité des pentes.

2. On commence par noter que τ est croissante sur $I \cap]-\infty, a[$ et $I \cap]a, +\infty[$. Il suffit alors de montrer qu'elle est majorée sur $I \cap]-\infty, a[$ et minorée sur $I \cap]a, +\infty[$ pour avoir le résultat, par le théorème de la limite monotone.

Pour $(x, y) \in I^2$ tel que $x < y < a$, on a $\tau(x) \leqslant \tau(y)$ d'après l'inégalité précédente. τ est donc croissante sur $I \cap]-\infty, a[$.
De même si $(x, y) \in I^2$ vérifie $a < x < y$, on a $\tau(x) \leqslant \tau(y)$ d'après l'inégalité précédente. τ est donc croissante sur $I \cap]a, +\infty[$.
Enfin, en fixant $y > a$, on a pour tout $x < a$,

$$\tau(x) = \frac{f(a) - f(x)}{a - x} \leqslant \frac{f(y) - f(a)}{y - a}$$

d'après la question précédente, donc τ est majorée sur $I \cap]-\infty, a[$. Par le théorème de la limite monotone, τ admet donc une limite finie à gauche en a.
De même, en fixant $y < a$, on a pour tout $x > a$:

$$\tau(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geqslant \frac{f(a) - f(y)}{a - y}$$

d'après la question précédente, donc τ est minorée sur $I \cap]a, +\infty[$. Par le théorème de la limite monotone, τ admet donc une limite finie à droite en a.

3. Il suffit ici d'utiliser le fait que la dérivabilité entraine la continuité.

D'après la question précédente, si $a \in I$, f est dérivable à gauche et à droite en a. On a donc f continue à gauche et à droite en a, ce qui siginifie

$$f(x) \underset{x \to a^-}{\longrightarrow} f(a) \text{ et } f(x) \underset{x \to a^+}{\longrightarrow} f(a).$$

On a les mêmes limites à gauche et à droite en a, donc f est continue en a.

f n'est pas forcément dérivable en revanche, car les dérivées à gauche et à droite peuvent être différentes. La fonction valeur absolue (qui est convexe) en donne un exemple.

CHAPITRE

Séries numériques et vectorielles 7

Exercice 7.1 : Équivalents de sommes et de restes

Pour $\alpha > 1$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \quad \text{et} \quad R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}.$$

1. Donner un équivalent R_n.

2. Étudier la convergence de la série $\sum \frac{R_n}{S_n}$ suivant les valeurs de α.

1. Pour déterminer un équivalent de R_n (qui tend vers 0 comme reste d'une série de Riemann convergente), on utilise une comparaison série/intégrale. Ainsi R_n se comporte comme $\int_{n+1}^{+\infty} t^{-\alpha} dt$.

C'est seulement pour une fonction monotone qu'une comparaison série intégrale peut être envisagée.

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, comme $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est décroissante sur $[k, k+1]$, on a

$$\forall t \in [k, k+1], \quad \frac{1}{(k+1)^\alpha} \leqslant \frac{1}{t^\alpha} \leqslant \frac{1}{k^\alpha}.$$

En intégrant, il vient :

$$\frac{1}{(k+1)^\alpha} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leqslant \frac{1}{k^\alpha}$$

puis en sommant de $n+1$ (ou $n \in \mathbb{N}^*$) à l'infini, il vient :

$$R_n - \frac{1}{(n+1)^\alpha} = R_{n+1} \leqslant \int_{n+1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \frac{(n+1)^{-\alpha+1}}{\alpha - 1} \leqslant R_n.$$

les restes étant bien définis puisque la série de terme général $\frac{1}{n^\alpha}$ converge par le critère de Riemann, et l'intégrale étant convergente par le même critère.

Ainsi, on obtient
$$\frac{1}{\alpha-1} \leqslant R_n(n+1)^{\alpha-1} \leqslant \frac{(n+1)^{\alpha-1}}{(n+1)^{\alpha}} + \frac{1}{\alpha-1}$$
donc par le théorème des gendarmes,
$$R_n(n+1)^{\alpha-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\alpha-1} \quad \text{et} \quad R_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(n+1)^{1-\alpha}}{\alpha-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}.$$

2. L'équivalent de la question précédente nous donne un équivalent du terme général. On conclut alors aisément par le critère de Riemann.

Comme $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (par le critère de Riemann), disons vers l, et comme $l > 0$ (comme somme de réels > 0) on a :
$$\frac{R_n}{S_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{l(\alpha-1)n^{\alpha-1}}.$$
Par le critère de comparaison des séries à termes positifs, et par le critère de Riemann, $\sum \frac{R_n}{S_n}$ converge si et seulement si $\alpha - 1 > 1$, si et seulement si $\alpha > 2$.

Exercice 7.2 : Reste d'une série alternée

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose
$$u_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}}.$$
Justifier l'existence des u_n et étudier la convergence de $\sum u_n$.

Pour justifier la définition des u_n, il faut montrer que la série de terme général $\frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}}$ converge. Il s'agit d'une série alternée, on utilise donc le critère spécial des séries alternées

La suite $\left(\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante et converge vers 0. Par le critère spécial des séries alternées,
$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}}$$
converge, et u_n, son reste d'ordre $n-1$, est défini pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour étudier la convergence de la série de terme général u_n, on utilise complètement la conclusion du critère spécial : u_n est du signe de son premier terme. On a donc $u_n = (-1)^n|u_n|$ et la série de terme général u_n est elle aussi alternée. Il faut alors réussir à montrer que $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et converge vers 0 pour pouvoir appliquer le critère spécial.

D'après le critère spécial sur les séries alternées, pour $n \in \mathbb{N}$, u_n est du même signe que $(-1)^n$ et $|u_n| \leqslant \frac{1}{\sqrt{n+1}}$. Ainsi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. On a également $|u_n|(-1)^n = u_n$. Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
|u_n| - |u_{n+1}| &= (-1)^{-n}u_n - (-1)^{-n-1}u_{n+1} \\
&= \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-n}}{\sqrt{k+1}} - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-n-1}}{\sqrt{k+1}} \\
&= \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-n}}{\sqrt{k+1}} - \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-n}}{\sqrt{k+2}} \\
&= \sum_{k=n}^{+\infty} (-1)^{k-n} \left(\frac{1}{\sqrt{k+1}} - \frac{1}{\sqrt{k+2}} \right) \\
&= \sum_{k=n}^{+\infty} (-1)^{k-n} \frac{1}{\sqrt{(k+1)(k+2)}(\sqrt{k+1} + \sqrt{k+2})}
\end{aligned}$$

On peut justifier très rigoureusement le changement d'indice plus haut en revenant aux sommes partielles, puis en passant à la limite. Il faut faire très attention à ne pas réarranger les termes des sommes définissant u_n car ils ne forment pas une famille sommable.

Une série peut être alternée sans que le $(-1)^n$ soit visible dans son terme général. Il faut juste que celui-ci change de signe à chaque valeur de n.

Comme la suite

$$\left(\frac{1}{\sqrt{(k+1(k+2)}(\sqrt{k+1} + \sqrt{k+2})} \right)_{k\in\mathbb{N}}$$

est décroissante, la série obtenue est encore alternée. Elle est donc du signe de son premier terme, donc positif.

La suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante et converge vers 0. Par le critère spécial sur les séries alternées, $\sum u_n$ converge.

Exercice 7.3 : Développement asymptotique

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Montrer que la suite $(H_n - \ln n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge. On note γ sa limite (appelée constante d'Euler).

2. Si $\alpha > 1$, déterminer un équivalent de $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ lorsque $n \to +\infty$.

3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $t_n = H_n - \ln n - \gamma$. Déterminer un équivalent de $t_{n+1} - t_n$, puis de t_n.

4. Raisonner de même pour montrer que

$$H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

1. Pour montrer que la suite $(H_n - \ln n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge, on va étudier la série télescopique associée. En effet, obtenir directement la convergence de cette suite est semble difficile. En revanche la différence de deux termes consécutifs se simplifie beaucoup.

Il ne faut pas oublier que l'étude de la série $\sum(u_{n+1} - u_n)$ permet de prouver la convergence (ou la divergence) de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned} v_n &= (H_{n+1} - \ln(n+1)) - (H_n - \ln(n)) = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) \\ &= \frac{1}{n} \times \frac{1}{1+\frac{1}{n}} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = -\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

On effectue le calcul d'un développement limité de v_n au plus petit ordre faisant apparaitre des termes en $\frac{1}{n^2}$. En effet, même si tous les termes sont nuls, on aura alors $v_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ ce qui donnera la convergence de $\sum v_n$.

Ainsi $-v_n \sim \dfrac{1}{2n^2}$, qui est le terme général d'une série de Riemann convergente. Ainsi, par le critère de comparaison des séries à termes positifs, $\sum(-v_n)$, puis $\sum v_n$ converge, ce qui montre que $(H_n - \ln n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

2. Cette question a déjà été traitée dans l'exercice **7.1**. On a $R_n \sim \dfrac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$.

3. Le calcul fait dans la question 1 montre que $t_{n+1} - t_n = v_n \sim -\frac{1}{2n^2}$. En sommant cette relation de comparaison de n à $+\infty$, on va en déduire un équivalent de t_n, avec la question précédente.

Par sommation des relations de comparaison (comme la série de terme général $-\dfrac{1}{2n^2}$ converge), on en déduit que

$$0 - t_n = \sum_{k=n}^{+\infty}(t_{k+1} - t_k) \sim \sum_{k=n}^{+\infty}\left(-\frac{1}{2k^2}\right) \sim -\frac{1}{2n}$$

puisque $(t_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0 et en appliquant la question précédente à $\alpha = 2$. Par suite $t_n \sim \dfrac{1}{2n}$.

4. On procède comme dans la question précédente en partant de la suite $u_n = t_n - \dfrac{1}{2n}$.

Notons $u_n = t_n - \dfrac{1}{2n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Un développement limité à l'ordre 3 donne

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= t_{n+1} - t_n - \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2n} = v_n - \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2n} \\
&= \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) - \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2n} \\
&= \frac{1}{2n} \times \frac{1}{1+\frac{1}{n}} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2n} \\
&= \frac{1}{2n}\left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) + \frac{1}{2n} \\
&= \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{2n^3} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
&= \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right).
\end{aligned}$$

L'ordre 2 ne suffit pas ici, car on sait à l'avance que tous les termes seront nuls, celui provenant de t_n étant compensé par celui provenant de $\frac{1}{2n}$.

Ainsi $u_{n+1} - u_n \sim \dfrac{1}{6n^3}$ et comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0, on trouve comme plus haut

$$0 - u_n = \sum_{k=n}^{+\infty}(u_{k+1} - u_k) \sim \sum_{k=n}^{+\infty}\left(\frac{1}{6k^3}\right) \sim \frac{1}{12n^2}.$$

Par suite $u_n \sim -\dfrac{1}{12n^2}$ donc $u_n = -\dfrac{1}{12n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ et on a

$$H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

On peut continuer ainsi pour déterminer les termes suivants dans le développement asymptotique de H_n. Si l'on souhaite prolonger l'exercice, le terme suivant est

$$H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{120n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right).$$

Exercice 7.4 : Transformation d'Abel

On considère deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On suppose que :

(1) il existe un réel positif M tel que, pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\left|\sum\limits_{n=0}^{N} a_n\right| \leqslant M$;

(2) $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive, décroissante et de limite nulle.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $A_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$.

1. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k b_k = \sum_{k=0}^{n-1} A_k(b_k - b_{k+1}) + A_n b_n.$$

2. En déduire que la série $\sum a_n b_n$ est convergente.

3. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Déterminer la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{\cos(n\theta)}{n+1}$.

1. Dans la première somme, nous allons remplaçer a_k par $A_k - A_{k-1}$ pour obtenir la seconde expression. Cette manipulation est la *transformation d'Abel*.

Il faut bien isoler le terme a_0 (pour lequel la formule $A_k - A_{k-1} = a_k$ n'a pas de sens). Après les manipulations sur les sommes, il faut aussi faire attention à ne regrouper que les parties communes des deux sommes (ici entre 1 et $n-1$).

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} a_k b_k &= \sum_{k=1}^{n} (A_k - A_{k-1}) b_k + a_0 b_0 \\ &= \sum_{k=1}^{n} A_k b_k - \sum_{k=1}^{n} A_{k-1} b_k + a_0 b_0 \\ &= \sum_{k=1}^{n} A_k b_k - \sum_{k=0}^{n-1} A_k b_{k+1} + a_0 b_0 \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}) + A_n b_n - A_0 b_1 + a_0 b_0 \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}) + A_n b_n.\end{aligned}$$

2. Pour montrer que la série converge, il faut montrer que la suite des sommes partielles admet une limite. La suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, et la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 par hypothèse. Ainsi $(A_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, et, avec la question précédente, on doit donc montrer que la série de terme général $A_k(b_k - b_{k+1})$ converge.
Comme on a l'hypothèse de décroissance sur la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on montre que cette série converge absolument.

Par hypothèse, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|A_n| \leqslant M$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Ainsi

$$|A_k(b_k - b_{k+1})| \leqslant |A_k| (b_k - b_{k+1}) \leqslant M(b_k - b_{k+1})$$

qui est le terme général d'une série télescopique convergente (puisque la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge). Par le critère de comparaison des séries à termes positifs, $\sum A_k(b_k - b_{k+1})$ converge absolument donc converge.
D'autre part $(A_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 (produit d'une suite bornée et d'une suite qui converge vers 0), donc

$$\sum_{k=0}^{n} a_k b_k = \sum_{k=0}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}) + A_n b_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{k=0}^{+\infty} A_k (b_k - b_{k+1})$$

donc la série $\sum a_k b_k$ converge.

3. Nous allons chercher à utiliser le résultat obtenu à la question précédente. Pour cela, il nous faut écrire

$$\frac{\cos(n\theta)}{n} = a_n b_n,$$

où a_n est le terme général d'une série dont les sommes partielles sont bornées et b_n est le terme général d'une suite réelle positive, décroissante et de limite nulle. Un choix s'impose tout naturellement :

$$a_n = \cos(n\theta) \qquad \text{et} \qquad b_n = \frac{1}{n+1}.$$

La suite de terme général b_n satisfait alors les conditions requises. Il nous reste à les vérifier pour la suite de terme général a_n : nous devons trouver un moyen de majorer la valeur absolue de la somme

$$\sum_{n=0}^{N} \cos(n\theta)$$

indépendamment de l'entier N. La somme de cosinus peut être simplifiée à l'aide des complexes en écrivant $\cos(n\theta) = \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta})$. Ceci fera apparaître une somme partielle de série géométrique, que nous savons calculer explicitement. Comme d'habitude, il faut traiter séparément le cas où la raison, ici $\exp(i\theta)$, vaut 1.

Distinguons deux cas.

- Supposons, tout d'abord, que $\theta = 0 \ [2\pi]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $n\theta = 0 \ [2\pi]$ et donc $\cos(n\theta) = 1$. Par conséquent, $\dfrac{\cos(n\theta)}{n+1} = \dfrac{1}{n+1}$ est le terme général d'une série divergente, et la série considérée diverge.
- Supposons, à présent, que $\theta \neq 0 \ [2\pi]$. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons

$$a_n = \cos(n\theta) \qquad \text{et} \qquad b_n = \frac{1}{n+1}.$$

Puisque $\theta \neq 0 \ [2\pi]$, nous avons $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \neq 1$. Par conséquent, quel que soit $N \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=0}^{N} a_n\right| = \left|\sum_{n=0}^{N} \cos(n\theta)\right| &= \left|\sum_{n=0}^{N} \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}\right)\right| = \left|\mathrm{Re}\left(\sum_{n=0}^{N} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^n\right)\right| \\ &= \left|\mathrm{Re}\left(\frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\theta}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\right)\right| \leqslant \left|\frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\theta}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\right| \leqslant \frac{2}{|1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}|}.\end{aligned}$$

Ce majorant est indépendant de N. En outre, la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive, décroissante et de limite nulle. On déduit alors du résultat obtenu à la question précédente que la série

$$\sum_{n\geqslant 0} a_n b_n = \sum_{n\geqslant 0} \frac{\cos(n\theta)}{n+1}$$

converge.

Exercice 7.5 : Un équivalent d'une suite récurrente

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite récurrente définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n\,\mathrm{e}^{-u_n}$.
1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$, puis que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
2. Déterminer la limite de $\dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n}$ et en déduire un équivalent de u_n.

1. Il s'agit d'une étude classique de suite récurrente. Pour montrer que tous les termes sont > 0, il suffit de montrer que $\mathbb{R}_+^*$ est stable par $f : x \mapsto xe^{-x}$.
On étudie alors le signe de $f(x) - x$ pour avoir les variations de la suite, et les points fixes de f pour avoir les candidats à la limite.

Posons $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x\,\mathrm{e}^{-x}$. Pour $x > 0$, on a $f(x) > 0$, donc $\mathbb{R}_+^*$ est stable par f. Comme $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.
Pour $x \in \mathbb{R}_+$, on a $f(x) - x = x\,(\mathrm{e}^{-x} - 1) \leqslant 0$ (puisque $-x \leqslant 0$, $\mathrm{e}^{-x} \leqslant 1$ par croissance d'exponentielle), donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
Elle est minorée par 0, donc elle converge, par le théorème de la limite monotone.
Comme $f(x) = x$ si et seulement si $x = 0$, et comme f est continue, sa limite est nécessairement 0.

2. On part de la définition de u_{n+1} en fonction de u_n et on effectue un développement limité pour obtenir la limite cherchée.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} &= \frac{1}{u_n\mathrm{e}^{-u_n}} - \frac{1}{u_n} = \frac{1}{u_n}(\mathrm{e}^{u_n} - 1)\\ &= \frac{1}{u_n}\,(1 + u_n + o(u_n) - 1) = 1 + o(1)\end{aligned}$$

puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. Ainsi

$$\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

On peut alors obtenir un équivalent de $\frac{1}{u_n}$ en sommant les relations de comparaison (et par télescopage).

La sommation des relations de comparaison se fait sur les sommes partielles dans le cas d'une série divergente, et sur les restes dans le cas d'une série convergente.

La série de terme général $\dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n}$ diverge grossièrement d'après la question précédente. Par sommation des équivalents, on obtient donc :

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{u_{k+1}} - \frac{1}{u_k} \right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=1}^{n} 1 \quad \text{i.e.} \quad \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_1} \underset{n\to+\infty}{\sim} n$$

par télescopage. Ainsi

$$\frac{1}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} n \quad \text{puis} \quad u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

Exercice 7.6 : Théorème du point fixe de Picard

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension finie et $f : E \to E$ une application k-lipschitzienne. On suppose que $k \in]0,1[$ et on se donne $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. On pourra étudier la série télescopique associée.

2. Montrer que f a un unique point fixe.

1. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge revient à montrer que la série de terme général $u_{n+1} - u_n$ converge. On cherche alors à majorer $\|u_{n+1} - u_n\|$ par le terme général d'une série convergente.

Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathscr{P}(n)$:

$$\|u_{n+1} - u_n\| \leqslant k^n \|u_1 - u_0\|.$$

On a clairement $\mathscr{P}(0)$. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}(n)$. Alors

$$\|u_{n+2} - u_{n+1}\| = \|f(u_{n+1}) - f(u_n)\| \leqslant k\|u_{n+1} - u_n\| \leqslant k^{n+1}\|u_1 - u_0\|$$

par hypothèse de récurrence. On a donc $\mathscr{P}(n+1)$, ce qui conclut la récurrence.
Comme $k \in]0,1[$, la série de terme général $k^n\|u_1 - u_0\|$ converge. Par suite, la série de terme général $\|u_{n+1} - u_n\|$ converge (par le critère de comparaison des séries à termes positifs).
Ainsi la série télescopique de terme général $(u_{n+1} - u_n)$ converge absolument donc converge (puisque E est de dimension finie). La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc.

Il est important de bien mentionner l'hypothèse E de dimension finie. En dimension quelconque, une série peut converger absolument sans converger tout court.

2. La limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ précédente est nécessairement un point fixe de f. Ceci donne l'existence. L'unicité se montre aisément.

Notons l la limite de la suite étudiée dans la question précédente. Comme $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} = (f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(l)$ (puisque f est continue, car lipschitzienne), on a $f(l) = l$ par unicité de la limite. Ainsi f admet un point fixe.
Supposons avoir $m \in E\backslash\{l\}$ un autre point fixe de f. Alors

$$\|m - l\| = \|f(m) - f(l)\| \leqslant k\|m - l\|,$$

donc $k > 1$ en simplifiant par $\|m - l\| > 0$... absurde ! Ainsi f admet un unique point fixe.

CHAPITRE 8

Familles sommables de nombres complexes

Exercice 8.1 : Existence de nombres transcendants

On dit qu'un nombre réel est algébrique s'il est racine d'un polynôme à coefficients rationnels. On dit qu'il est transcendant dans le cas contraire.
1. Montrer que l'ensemble des polynômes à coefficients rationnels est dénombrable.
2. En déduire qu'il existe des nombres transcendants.

1. Pour montrer qu'un ensemble donné est dénombrable, il faut réussir à le mettre en bijection avec un ensemble dénombrable. C'est généralement bien compliqué, on utilise donc plutôt les opérations sur les ensembles dénombrables.
Ici, l'ensemble des polynômes de $\mathbb{Q}[X]$ est réunion des $\mathbb{Q}_n[X]$, $n \in \mathbb{N}$. On étudie donc d'abord ces ensembles.

Pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{Q}_n[X]$ est isomorphe à (et donc en bijection avec) $\mathbb{Q}^{n+1}$ (ce sont deux $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels de dimension $n+1$). Il est donc dénombrable. Par suite,

$$\mathbb{Q}[X] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Q}_n[X]$$

est réunion dénombrable d'ensembles dénombrables, donc est dénombrable.

Il faut bien se souvenir que deux espaces vectoriels linéairement isomorphes sont en particulier équipotents.

2. Vu la question précédente, on va tenter de montrer que l'ensemble des nombres algébriques est dénombrable. Comme $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable, on pourra en déduire l'existence cherchée.

Notons A l'ensemble des nombres (réels) algébriques, et, si $P \in \mathbb{Q}[X]\backslash\{0\}$, A_P l'ensemble des racines réelles de P. Par définition,

$$A = \bigcup_{P \in \mathbb{Q}[X]\backslash\{0\}} A_P.$$

Comme les ensembles A_P sont tous finis, A est une réunion dénombrable d'ensembles finis. Il est donc dénombrable. Cependant $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable, donc $A \neq \mathbb{R}$ et il existe des nombres réels qui sont transcendants.

Lorsqu'on manipule une union dénombrable d'ensembles, elle peut être indexée par n'importe quel ensemble I dénombrable (comme $\mathbb{Q}[X]\backslash\{0\}$ plus haut).

On a même montré que l'ensemble des nombres transcendants est infini non dénombrable. Il y a donc bien plus de nombres transcendants que de nombre algébriques.

Exercice 8.2 : Points de discontinuité d'une fonction monotone

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction monotone. Montrer que f a un nombre au plus dénombrable de points de discontinuité.
On pourra constater qu'en un point de discontinuité a, il existe un rationnel entre $\lim_{x \to a^-} f(x)$ et $\lim_{x \to a^+} f(x)$

Notons tout d'abord que comme f est monotone, elle admet une limite à gauche et à droite en tout point. f est alors continue en a si et seulement si

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x).$$

En suivant l'indication, si f est discontinue en a, on a alors $\lim_{x \to a^-} f(x) < \lim_{x \to a^+} f(x)$ (où l'inégalité stricte inverse si f est décroissante) et par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, on peut trouver un rationnel q_a entre ces deux limites.
Pour conclure, on constate juste que l'application $a \mapsto q_a$ est injective.

Quitte à changer f en $-f$, on suppose f croissante. Par le théorème de la limite monotone, elle admet une limite à gauche et à droite en tout point. f est alors continue en a si et seulement si $\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x)$.

Si f est discontinue en a, on a alors $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) < \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ et comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, on peut trouver un rationnel q_a entre ces deux limites :

$$\lim_{x\to a^-} f(x) < q_a < \lim_{x\to a^+} f(x).$$

Soient a et b deux points de discontinuité de f distincts tels que $a < b$. Alors

$$q_a < \lim_{x\to a^+} f(x) \leqslant \lim_{x\to b^-} f(x) < q_b,$$

l'inégalité centrale provenant de la croissance de f.
Notant A l'ensemble des points de discontinuité de f, on vient de montrer que $\varphi : A \to \mathbb{Q}$, $a \mapsto q_a$ est strictement croissante donc injective. Ceci prouve que A est fini ou dénombrable (puisque $\mathbb{Q}$ est dénombrable).

Montrer qu'il existe une injection f d'un ensemble A dans un ensemble dénombrable suffit pour montrer qu'il est fini ou dénombrable, car A est alors équipotent à $f(A)$, qui est une partie d'un ensemble dénombrable.

Exercice 8.3 : Exemple de produit de Cauchy

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $H_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Montrer l'égalité

$$\mathrm{e} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n.n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n}{n!}.$$

On donne $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = \mathrm{e}$.

Le membre de droite est un produit de deux séries en remplaçant e par la série donnée en indication (cette formule sera prouvée dans le chapitre sur les séries entières). On va donc faire un produit de Cauchy.

Notons que $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n.n!}$ converge absolument (car $\frac{1}{n.n!} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ par croissance comparée) donc converge.

Ainsi, comme les deux séries convergent absolument, on a :

$$\begin{aligned}\mathrm{e}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n.n!} &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\right)\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n.n!}\right)\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k.k!}\times\frac{1}{(n-k)!}\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\end{aligned}$$

Il faut bien faire attention à vérifier la convergence absolue des deux séries pour pouvoir appliquer le théorème sur le produit de Cauchy.

Il reste alors à montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^{k-1}}{k} = H_n,$$

ce qu'on va montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.
Le résultat étant clair pour $n = 1$, on le suppose acquis pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$.
Alors par la formule de Pascal

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k}\frac{(-1)^{k-1}}{k} &= \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k}\frac{(-1)^{k-1}}{k} + \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\\ &= \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^{k-1}}{k} + \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\\ &= H_n + \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}.\end{aligned}$$

Or pour $k \in \{1, \dots, n+1\}$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{k}\binom{n}{k-1} &= \frac{n!}{k(k-1)!(n-k+1)!}\\ &= \frac{n!}{k!(n-k+1)!} = \frac{(n+1)!}{(n+1)k!(n+1-k)!}\\ &= \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k}\end{aligned}$$

donc

$$\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}\frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k}\frac{(-1)^{k-1}}{n+1}$$

$$= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}(-1)^k$$

$$= \frac{1}{n+1} - (-1+1)^{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

donc on a le résultat pour $n+1$, ce qui achève la récurrence. En conclusion :

$$\mathrm{e}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n.n!} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{H_n}{n!}.$$

Exercice 8.4 : Non inversion de signes sommes

Pour $(n,p)\in\mathbb{N}^2$, on pose

$$a_{n,p} = \frac{1}{n^2-p^2} \text{ si } n\neq p \quad \text{et} \quad a_{n,p}=0 \text{ sinon.}$$

1. Justifier que la famille $(a_{n,p})_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ n'est pas sommable.
2. Calculer

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty}a_{n,p} \quad \text{et} \quad \sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}a_{n,p}.$$

On donne $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

1. Pour montrer qu'une famille n'est pas sommable, il suffit de trouver une sous-famille dont la somme (en valeur absolue) diverge.

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on a

$$a_{n,n-1} = \frac{1}{n^2-(n-1)^2} = \frac{1}{2n-1} \geqslant 0.$$

Comme la série de terme général $a_{n,n-1}$ diverge (par le critère de Riemann), la famille $(a_{n,p})_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ n'est pas sommable.

2. Pour calculer $\sum\limits_{p=0}^{+\infty} a_{n,p}$ à n fixé, on fait une décomposition en éléments simples (si $n\neq 0$). On découpe alors la série en plusieurs morceaux que l'on simplifie.

Si $n = 0$, on a
$$\sum_{p=0}^{+\infty} a_{n,p} = -\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} = -\frac{\pi^2}{6}.$$
Supposons maintenant $n \neq 0$. On peut alors décomposer en éléments simples, et on a $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que
$$\frac{1}{n^2 - X^2} = \frac{\lambda}{X-n} + \frac{\mu}{X+n}.$$
On multiplie par $(X+n)$et on évalue en $-n$ pour trouver $\mu = \dfrac{1}{2n}$. De même on trouve $\lambda = -\dfrac{1}{2n}$. Ainsi, pour $P > 2n$, on a
$$\begin{aligned}
\sum_{p=0}^{P} a_{n,p} &= \sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{n^2-p^2} + \sum_{p=n+1}^{P} \frac{1}{n^2-p^2} \\
&= \frac{1}{2n}\sum_{p=0}^{n-1}\left(\frac{1}{n-p} + \frac{1}{p+n}\right) + \frac{1}{2n}\sum_{p=n+1}^{P}\left(-\frac{1}{p-n} + \frac{1}{p+n}\right) \\
&= \frac{1}{2n}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} + \sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{P-n}\frac{1}{k} + \sum_{k=2n+1}^{P+n}\frac{1}{k}\right) \\
&= \frac{1}{2n}\left(\frac{1}{n} + \sum_{k=2n+1}^{P+n}\frac{1}{k} - \sum_{k=2n}^{P-n}\frac{1}{k}\right) \\
&= \frac{1}{2n}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n} + \sum_{k=P-n+1}^{P+n}\frac{1}{k}\right) \\
&= \frac{1}{4n^2} + \frac{1}{2n}\sum_{k=P-n+1}^{P+n}\frac{1}{k}.
\end{aligned}$$
Comme on a
$$\frac{1}{2n}\left|\sum_{k=P-n+1}^{P+n}\frac{1}{k}\right| \leqslant \frac{1}{2n}\sum_{k=P-n+1}^{P+n}\frac{1}{P-n+1} \leqslant \frac{1}{P-n+1} \underset{P\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$
on en déduit que
$$\sum_{p=0}^{+\infty} a_{n,p} = \frac{1}{4n^2}.$$

Il est essentiel de revenir aux sommes partielles ici, puisque toutes les séries manipulées sont divergentes.

Par suite
$$\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty} a_{n,p} = -\frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{4n^2} = -\frac{\pi^2}{6} + \frac{\pi^2}{24} = -\frac{\pi^2}{8}.$$
D'autre part on a clairement
$$\sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n,p} = -\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty} a_{n,p} = \frac{\pi^2}{8}.$$

On vient donc de donner un contre-exemple au théorème d'inversion des sommes doubles, lorsque l'hypothèse de sommabilité n'est pas vérifiée.

Exercice 8.5 : Étude d'une somme

On définit là où c'est possible $S(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{t^n}{1+t^n}$.

1. Déterminer le domaine de définition D de S.

2. Montrer que pour $t \in D$,
$$S(t) = \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}\frac{t^k}{1-t^k}.$$

3. Déterminer le développement en série entière de S et donner une interprétation arithmétique de ses coefficients.

1. On peut facilement comparer le terme général à une suite géométrique si $|t| < 1$. Sinon, on constate qu'il y a divergence grossière.

Soit $t \in \mathbb{R}$. Si $|t| \geqslant 1$, le terme général de la série tend vers 1 (sauf si $t = -1$ où il n'existe pas toujours), donc on a divergence grossière.
Supposons donc $|t| < 1$, alors
$$\left|\frac{t^n}{1+t^n}\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} |t|^n$$
qui est le terme général d'une série géométrique convergente. Par le critère de comparaison des séries à termes positifs, la série définissant S converge absolument ; elle converge donc.
Ainsi le domaine de définition de S est $D =]-1, 1[$.

2. On peut écrire S sous la forme d'une somme double en développant $\frac{t^n}{1+t^n}$ sous la forme d'une série géométrique. On tente alors d'appliquer le théorème pour inverser les doubles sommes doubles.

Soit $t \in]-1,1[$. Alors
$$S(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{1+t^n} = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} t^{nk}.$$
Pours $(n,k) \in I = (\mathbb{N}^*)^2$, posons $u_{n,k} = (-1)^{k-1}t^{nk}$. On a
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty} |u_{n,k}| = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty} |t|^{nk} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|t|^n}{1-|t|^n}$$
et comme dans la question précédente,
$$\frac{|t|^n}{1-|t|^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} |t|^n$$
donc est le terme général d'une série convergente.
La famille $(u_{n,k})_{(n,k)\in I}$ est donc sommable, et on peut appliquer le théorème d'inversion des sommes doubles. Ainsi :
$$S(t) = \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} t^{nk} = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{t^k}{1-t^k}.$$

3. En reprenant le calcul de la question précédente, on obtient $S(t)$ sous la forme d'une somme double de termes de la forme t^{nk}. Pour obtenir S sous la forme d'une série entière, il faut alors regrouper les termes à nk constants, en faisant une sommation par paquets.

Pour pouvoir effectuer une sommation par paquets, il est indispensable que la famille soit sommable, sinon on ne peut échanger l'ordre des termes.

On a vu dans la question précédente que pour $t \in]-1,1[$,
$$S(t) = \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} t^{nk} = \sum_{(k,n)\in I} u_{k,n}$$
avec la famille $(u_{k,n})_{(k,n)\in I}$ sommable.
Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on note $A_p = \{(k,n) \in I \,;\, kn = p\}$. Les A_p forment clairement une partition de I, donc en effectuant une sommation par paquets, il vient :
$$S(t) = \sum_{p=1}^{+\infty} \sum_{(k,n)\in A_p} u_{k,n} = \sum_{p=1}^{+\infty} a_p t^p$$

où

$$a_p = \sum_{(k,n)\in A_p} (-1)^{k-1}.$$

Cette somme représente le nombre de k impairs tels que $k|p$ moins le nombre de k pairs tels que $k|p$. On a donc $a_p = d_p - e_p$, où d_p est le nombre de diviseurs impairs de p, e_p le nombre de diviseurs pairs de p.

Exercice 8.6 : Somme de restes

Pour $\alpha > 2$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.

Grâce à l'équivalent trouvé dans l'exercice **7.1**, on sait que $\sum R_n$ converge. Montrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} R_n = \sum_{q=1}^{+\infty} q^{1-\alpha}.$$

En écrivant R_n sous forme d'une somme, on est amené à une somme double. On pense donc à appliquer le théorème d'inversion des sommes doubles pour les intervertir. Pour ce faire, il faut introduire une famille sommable.

Il est indispensable de vérifier l'hypothèse de sommabilité, comme on l'a vu dans l'exercice **8.4**, il est possible que la somme dans un sens ou dans l'autre donne des résultats différents.

On cherche donc à écrire la somme des R_n sous la forme d'une somme double. Pour ne pas s'embêter avec un ensemble de couples trop compliqué, on complète R_n par des 0 pour l'indexer de 1 à $+\infty$.

Pour $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on note

$$u_{n,p} = 0 \text{ si } p < n \text{ et } u_{n,p} = \frac{1}{p^\alpha} \text{sinon.}$$

C'est une famille de réels positifs. On a alors

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{p=1}^{+\infty} u_{n,p} = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{p=n}^{+\infty} \frac{1}{p^\alpha} = \sum_{n=1}^{+\infty} R_n$$

et cette série converge (par l'exercice **7.1**).

Ainsi la famille $(u_{n,p})_{(n,p)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable, et on peut appliquer le théorème d'inversion des sommes doubles :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} R_n = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{p=1}^{+\infty} u_{n,p} = \sum_{p=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} u_{n,p} = \sum_{p=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{p} \frac{1}{p^\alpha} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^{\alpha-1}}$$

Exercice 8.7 : Calculs de sommes doubles

On note $I = (\mathbb{N}^*)^2$, $J = \{(p,q) \in I \,;\, p|q\}$ et $K = \{(p,q) \in I \,;\, p \wedge q = 1\}$.
Calculer les sommes suivantes :

$$A = \sum_{(p,q)\in I} \frac{1}{p^2q^2} \qquad B = \sum_{(p,q)\in J} \frac{1}{p^2q^2} \quad \text{et} \quad C = \sum_{(p,q)\in K} \frac{1}{p^2q^2}.$$

On donne

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

On commence par le calcul de A, qui est le plus simple.

On a

$$A = \sum_{p=1}^{+\infty}\sum_{q=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2q^2} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{\pi^2}{6}\,\frac{1}{p^2} = \frac{\pi^4}{36}$$

et comme les séries convergent (par le critère de Riemann), la famille est bien sommable.

On peut alors justifier facilement l'existence des sommes B et C : on somme des sous-familles de la somme A. On calcule ensuite B en sommant d'abord par rapport à p, l'ensemble des multiples de q étant l'ensemble des pk, $k \geqslant 1$.

Les familles définissant les sommes B et C étant des sous-familles de la famille sommable $\left(\frac{1}{p^2q^2}\right)_{(p,q)\in I}$, elles sont également sommables.
L'ensemble des couples (p,q) de J est aussi l'ensemble des couples de la forme (p,pk), avec p et $k \in \mathbb{N}^*$.
On a alors

$$B = \sum_{p=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2\,(pk)^2} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^4} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^4}\,\frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^6}{540}$$

Il faut choisir le sens le plus judicieux pour le calcul.
Ici, dans l'autre sens, le calcul aurait fait apparaître le nombre de diviseurs de q, qu'on ne sait pas calculer.

Il reste à calculer C. On va en fait faire le calcul plus général des sommes à pgcd constant, en partant de A.

Ceci revient à faire une sommation par paquets dans A, en regroupant les couples (p,q) tels que $p \wedge q = k$. On fera alors le lien avec les couples (p,q) vérifiant $p \wedge q = 1$ en divisant p et q par k.

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note $D_k = \{(p,q) \in I\ ;\ p \wedge q = k\}$. Les D_k forment clairement une partition de I.

On a déjà vu que la famille des $\dfrac{1}{p^2q^2}$ était sommable, donc en regroupant par paquets, on a

$$A = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{(p,q)\in D_k} \frac{1}{p^2q^2}.$$

De plus, on a (p,q) dans D_1 si et seulement si (kp,kq) est dans D_k, ainsi

$$\sum_{(p,q)\in D_k} \frac{1}{p^2q^2} = \sum_{(p,q)\in D_1} \frac{1}{(kp)^2(kq)^2} = \frac{1}{k^4}C.$$

On a donc

$$\frac{\pi^4}{36} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{C}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}C \quad \text{et} \quad C = \frac{90}{36} = \frac{5}{2}.$$

Exercice 8.8 : Produit eulérien

On note $\mathscr{P}$ l'ensemble des nombres premiers et $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ l'énumération strictement croissante de $\mathscr{P}$.
Si $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n l'ensemble des $p \in \mathbb{N}^*$ tels que les nombres premiers apparaissant dans la décomposition en facteurs premiers de p sont dans $\{p_1, \ldots, p_n\}$.
On se fixe $s \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(s) > 1$.
1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1-p_k^{-s}} = \sum_{q\in A_n} q^{-s}.$$

2. En déduire que

$$\prod_{p\in\mathscr{P}} \frac{1}{1-p^{-s}} = \sum_{q=1}^{+\infty} q^{-s}.$$

1. Pour $k \in \{1, \ldots n\}$, on a

$$\frac{1}{1-p_k^{-s}} = \sum_{n=0}^{+\infty} p_k^{-ns}.$$

Il faut donc faire le produit de n séries géométriques.

Pour $k \in \{1, \ldots n\}$, $\sum p_k^{-ns}$ converge absolument : c'est une série géométrique de raison p_k^{-s} et $|p_k^{-s}| < 1$ puisque $\mathrm{Re}\, s > 1$.

La famille $(p_1^{-q_1 s} \dots p_n^{-q_n s})_{(q_1,\dots,q_n)\in\mathbb{N}^n}$ est donc sommable. Par suite, on a :

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1-p_k^{-s}} = \prod_{k=1}^{n} \left(\sum_{q_k=0}^{+\infty} p_k^{-q_k s} \right) = \sum_{q_1=0}^{+\infty} \cdots \sum_{q_n=0}^{+\infty} p_1^{q_1 s} \cdots p_n^{-q_n s}$$
$$= \sum_{q_1=0}^{+\infty} \cdots \sum_{q_n=0}^{+\infty} (p_1^{q_1} \cdots p_n^{q_n})^{-s}$$

La somme fait donc intervernir des m^{-s}, où m est un nombre dont la décomposition en facteurs premiers ne fait intervenir que les nombres $p_1, \dots, p_n$, donc $m \in A_n$.

De plus, chaque nombre m de A_n s'écrit de manière unique sous la forme $p_1^{q_1} \cdots p_n^{q_n}$, avec $(q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{N}^n$ (par la décomposition en facteurs premiers. On a donc

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1-p_k^{-s}} = \sum_{q_1=0}^{+\infty} \cdots \sum_{q_n=0}^{+\infty} (p_1^{q_1} \cdots p_n^{q_n})^{-s} = \sum_{m\in A_n} m^{-s}.$$

2. Il faut faire passer à la limite quand $n \to +\infty$ le résultat précédent.
Le membre de gauche va tendre vers le produit sur tous les nombres premiers (si on trouve une limite finie). Il reste à étudier le membre de droite.

> ⚠ On ne peut pas passer directement à la limite en disant que A_n tend vers $\mathbb{N}^*$. Il va falloir majorer la différence entre la somme sur A_n et la somme sur $\mathbb{N}^*$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, si $q \notin A_n$, la décomposition en facteurs premiers de q fait intervenir un nombre premier plus grand que p_{n+1}, donc $q \geqslant p_{n+1}$.
Ainsi on a

$$\left| \sum_{q\in A_n} q^{-s} - \sum_{q=1}^{+\infty} q^{-s} \right| = \left| \sum_{q\in\mathbb{N}^*\setminus A_n} q^{-s} \right| \leqslant \sum_{q\in\mathbb{N}^*\setminus A_n} |q^{-s}|$$
$$\leqslant \sum_{q\in\mathbb{N}^*\setminus A_n} q^{-\operatorname{Re} s} \leqslant \sum_{q=p_{n+1}}^{+\infty} q^{-\operatorname{Re} s}.$$

Comme $\operatorname{Re} s > 1$,

$$\sum_{q=t}^{+\infty} q^{-\operatorname{Re} s} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

comme reste d'une série de Riemann convergente. De plus $p_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc

$$\sum_{q=p_{n+1}}^{+\infty} q^{-\operatorname{Re} s} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ainsi

$$\sum_{q\in A_n} q^{-s} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{q=0}^{+\infty} q^{-s}$$

et on en déduit que :

$$\prod_{p\in\mathscr{P}} \frac{1}{1-p^{-s}} = \sum_{q=1}^{+\infty} q^{-s}.$$

Cette propriété due à Euler permet de relier l'étude des nombres premiers (dans le produit à gauche) à l'étude de la fonction ζ de Riemann (définie par la série à droite).
En particulier, la conjecture de Riemann, qui porte sur la localisation des zéros de la fonction ζ permettrait, si elle était vérifiée, d'avoir de nombreuses informations sur la répartition des nombres premiers.

CHAPITRE

9

Suites et séries de fonctions

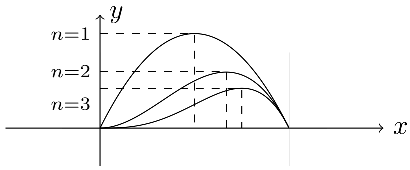
Exercice 9.1 : Convergence uniforme d'une suite de fonctions I

On définit deux suites de fonctions sur $[0,1]$ par

$$f_n : x \mapsto x^n(1-x) \qquad \text{et} \qquad g_n : x \mapsto x^n \sin(\pi x).$$

Démontrer que ces suites convergent uniformément vers la fonction constante nulle sur $[0,1]$.

L'étude des fonctions f_n est aisée. Nous allons pouvoir déterminer leurs extrema, ce qui permettra de conclure quant à leur convergence uniforme. La représentation graphique des fonctions f_n permet de visualiser la convergence uniforme : on constate que l'abscisse du maximum de $|f_n|$ (en fait de f_n, car cette fonction est positive) tend vers 1 et que la valeur de ce maximum tend bien vers 0.



Pour $n \in \mathbb{N}$ la dérivée de f_n est

$$f_n'(x) = nx^{n-1} - (n+1)x^n = x^{n-1}(n-(n+1)x).$$

On en déduit que la fonction f_n est croissante sur $\left[0, \dfrac{n}{n+1}\right]$ et décroissante sur $\left[\dfrac{n}{n+1}, 1\right]$. De plus, elle vaut 0 en 0 et 1. Ainsi

$$\forall x \in [0,1], \quad 0 \leqslant f_n(x) \leqslant f_n\left(\frac{n}{n+1}\right)$$

ce qui montre que f_n est positive et atteint son maximum en $\dfrac{n}{n+1}$, dont on en déduit que $\|f_n\|_\infty = f_n\left(\dfrac{n}{n+1}\right)$.

Par ailleurs,

$$f_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} \frac{1}{n+1} \sim \frac{1}{\mathrm{e}\, n}$$

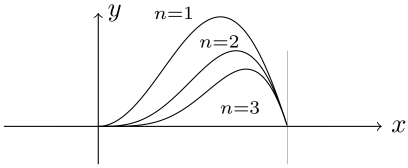
puisque

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} z = \exp\left(-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) = \exp\left(-n\left(\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)$$
$$= \exp(-1+o(1)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{-1}.$$

En conséquence, $\|f_n\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, ce qui montre que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 sur $[0,1]$.

Il faut bien faire la distinction entre la convergence ponctuelle des f_n, et la convergence du sup des f_n. Ici, on ne regarde finalement que la valeur des f_n en un point particulier, mais c'est le point où leur maximum est atteint.

Le tracé des premières fonctions g_n confirme visuellement la convergence uniforme vers 0 :

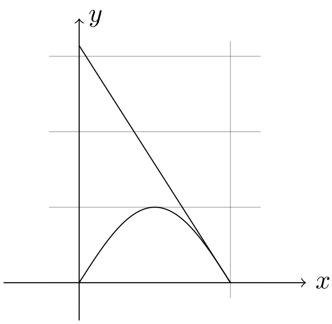


Cependant, le calcul de la dérivée n'est pas aussi concluant. En effet, pour $x \in [0,1]$:

$$g_n'(x) = nx^{n-1}\sin(\pi x) + x^n\pi\cos(\pi x) = x^{n-1}(n\sin(\pi x) + \pi x\cos(\pi x)).$$

Il n'est pas évident de déterminer les points d'annulation de cette dérivée pour étudier la fonction g_n.

Il est assez simple de majorer $\sin(\pi x)$ par une fonction affine de x en revanche pour se ramener aux fonctions f_n précédemment étudiées. Plus précisément, on a la majoration $\sin(\pi x) \leqslant \pi(1-x)$ pour $x \in [0,1]$, majoration que l'on peut aisément visualiser graphiquement :



Elle peut être établie de plusieurs façons, par exemple par une inégalité de convexité ou par l'inégalité des accroissements finis.

La fonction $f : x \mapsto \sin(\pi x)$ est dérivable sur $[0,1]$, et pour $x \in [0,1]$,

$$|f'(x)| = |\pi \cos(\pi x)| \leqslant \pi.$$

Ainsi f est π-lipschitzienne et on a :

$$\sin(\pi x) = \sin(\pi x) - \sin(\pi) \leqslant |f(1) - f(x)| \leqslant \pi(1-x).$$

Par ailleurs, $\sin(\pi x) \geqslant 0$ pour $x \in [0,1]$. En conséquence :

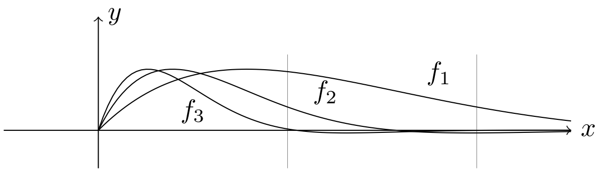
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in [0,1], \quad 0 \leqslant g_n(x) \leqslant \pi f_n(x).$$

On a donc $\|g_n\|_\infty \leqslant \pi \|f_n\|_\infty$, ce qui entraîne $\|g_n\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ d'après l'étude de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ précédemment effectuée. Ainsi, la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 sur $[0,1]$.

Exercice 9.2 : Convergence uniforme d'une suite de fonctions II

Démontrer que la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$ par $f_n(x) = \mathrm{e}^{-nx}\sin(nx)$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$, que la convergence est uniforme sur tout intervalle de la forme $[a, +\infty[$ $(a > 0)$ mais qu'elle n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}_+$.

Le tracé à la calculatrice des fonctions f_n montre ce qui se produit : le graphe présente une « bosse » qui se tasse près de 0 et empêche ainsi la convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$. Cependant, cette bosse sort de tout intervalle $[a, +\infty[$ pour $a > 0$ donné, ce qui explique que l'on ait néanmoins la convergence uniforme sur chacun de ces intervalles.



Comme souvent, la convergence simple ne pose pas de difficulté. C'est la convergence uniforme qui risque d'être plus technique.

Pour $x > 0$ on a $f_n(x) = (\mathrm{e}^{-x})^n \sin(nx)$ et donc $|f_n(x)| \leqslant (\mathrm{e}^{-x})^n$. Comme $\mathrm{e}^{-x} \in]0,1[$, on a $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Par ailleurs, $f_n(0) = 0$. Ainsi, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction constante nulle sur $\mathbb{R}_+$.

Si la suite convergeait uniformément sur $\mathbb{R}_+$, sa limite serait nécessairement sa limite simple, à savoir 0. Il suffit donc de démontrer que $\|f_n\|_{\infty,\mathbb{R}_+}$ ne tend pas vers 0 pour montrer qu'il n'y a pas convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$.
On étudie la fonction f_n pour tenter de déterminer le maximum de $|f_n|$.

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$\begin{aligned} f_n'(x) &= -n\mathrm{e}^{-nx}\sin(nx) + \mathrm{e}^{-nx} n\cos(nx) = n\mathrm{e}^{-nx}(\cos(nx) - \sin(nx)) \\ &= n\mathrm{e}^{-nx}\sqrt{2}\cos\left(nx + \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

la dernière égalité étant obtenue à l'aide de la formule de trigonométrie :

$$\cos(a) - \sin(a) = \sqrt{2}\left(\cos(a)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin(a)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}\cos\left(a + \frac{\pi}{4}\right).$$

Il n'est pas tout à fait évident d'exploiter cette formule pour obtenir le maximum de $|f_n|$, mais nous pouvons avoir une minoration

Le calcul précédent montre que $f_n'\left(\frac{\pi}{4n}\right) = 0$, avec f_n' positive sur $\left[0, \frac{\pi}{4n}\right]$. f_n est donc croissante sur cet intervalle, et comme $f_n(0) = 0$, on a :

$$\|f_n\|_\infty \geqslant f_n\left(\frac{\pi}{4n}\right) = e^{-\pi/4}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\pi/4}.$$

La suite $(\|f_n\|_\infty)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc minorée par un réel strictement positif, elle ne converge donc pas vers 0. Ainsi $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers 0 sur $\mathbb{R}_+$.

Nous n'avons pas montré que le maximum de $|f_n|$ était égal à $\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\pi/4}$, juste qu'il était plus grand que cette valeur.

Pour la convergence uniforme sur $[a, +\infty[$, nous avons un renseignement bien plus simple sur f_n : $|f_n(x)| \leqslant \mathrm{e}^{-nx}$ (car $|\sin(nx)| \leqslant 1$).

Soit $a > 0$. Pour $x \in [a, +\infty[$, on a $|f_n(x)| \leqslant \mathrm{e}^{-nx} \leqslant \mathrm{e}^{-na}$. Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|f_n\|_{\infty,[a,+\infty[} \leqslant \mathrm{e}^{-na}.$$

Comme $a > 0$, $\mathrm{e}^{-na} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\|f_n\|_{\infty,[a,+\infty[} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Ainsi, pour tout réel $a > 0$, la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction constante nulle sur $[a, +\infty[$.

Exercice 9.3 : Convergence uniforme d'une série de fonctions

On considère la série de fonctions $\sum f_n$ définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto (-1)^n \frac{x}{n^2 + x^2}.$$

1. Démontrer que cette série est uniformément convergente sur $\mathbb{R}_+$ mais non normalement convergente. Quelle est la limite de sa somme en $+\infty$?
2. Démontrer que sa somme est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

1. Le plus simple pour les séries de fonction est de commencer par étudier la convergence normale. En l'occurence, les fonctions f_n sont aisées à étudier et nous déterminerons sans problème les maxima de leurs valeurs absolues.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $x \in \mathbb{R}$ on a

$$|f_n(x)| = \frac{x}{n^2 + x^2}.$$

Cette fonction est dérivable et

$$|f_n|'(x) = \frac{n^2 - x^2}{(n^2 + x^2)^2}.$$

Ainsi, $|f_n|$ est croissante sur $[0, n]$ et décroissante sur $[n, +\infty[$. Ainsi, $|f_n|$ possède sur $\mathbb{R}_+$ un maximum atteint en n. On a donc $\|f_n\|_\infty = |f_n(n)| = \dfrac{1}{2n}$.
Ainsi, la série $\sum \|f_n\|_\infty$ est une série de Riemann divergente. En conséquence, la série de fonctions $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}_+$.

Ce résultat est problématique car la convergence normale est le moyen le plus simple pour montrer qu'une série de fonctions est uniformément convergente. Il va donc falloir raisonner autrement pour conclure.
Nous allons commencer par démontrer que la série converge simplement, ce qui permettra de considérer R_n, le reste d'ordre n de $\sum f_k$. Il suffira alors de démontrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \|R_n\|_\infty = 0$, autrement dit que le reste de la série converge uniformément vers 0.
Il nous faudra donc obtenir une majoration de la valeur absolue du reste. C'est ici que l'on va pouvoir exploiter la forme particulière de la série $\sum f_k$: à x donné, il s'agit d'une série numérique alternée. Le critère spécial des séries alternées nous donnera à la fois la convergence simple et une majoration du reste, ce qui permettra de conclure.

Fixons $x \in \mathbb{R}_+$. La série numérique $\sum f_k(x)$ vérifie les hypothèses du critère spécial des séries alternées : en effet, son terme général est alterné et sa valeur absolue tend vers 0 en décroissant quand n tend vers $+\infty$.
Ceci montre que la série $\sum f_k$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$. De plus, en notant $R_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$ nous avons aussi $|R_n(x)| \leqslant |f_{n+1}(x)|$. Nous savons, d'après les calculs précédents, que $|f_{n+1}(x)| \leqslant \dfrac{1}{2(n+1)}$. Ainsi,

$$\|R_n\|_\infty \leqslant \frac{1}{2n+2} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

La suite des restes de la série $\sum f_k$ converge donc uniformément vers 0. On en déduit que la série $\sum f_k$ est uniformément convergente sur $\mathbb{R}_+$.

Ce raisonnement s'adapte à une situation bien plus générale : si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions convergeant uniformément vers 0 sur un intervalle I et telle que, pour tout $x \in I$, $\sum f_n(x)$ vérifie les hypothèses du critère spécial des séries alternées, alors $\sum f_n$ converge uniformément sur I.

Enfin, la convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$ permet d'intervertir $\sum$ et limite en $+\infty$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. La série $\sum f_n$ étant uniformément convergente sur $\mathbb{R}_+$ on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 0.$$

2. Il faut utiliser le résultat suivant : si les fonctions f_n sont de classe $\mathscr{C}^1$, si $\sum f'_n$ converge uniformément et si $\sum f_n$ converge simplement, alors $\sum f_n$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et on peut intervertir $\sum$ et dérivation.

La convergence simple de $\sum f_n$ est d'ores et déjà acquise. Pour la convergence uniforme de $\sum f'_n$, nous allons d'abord étudier la convergence normale : si cette série converge normalement, elle sera *a fortiori* uniformément convergente, comme nous l'avons remarqué plus haut.

Les fonctions f_n sont bien toutes de classe $\mathscr{C}^1$ et la série $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$. Par ailleurs, nous avons vu que, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f'_n(x) = (-1)^n \frac{n^2 - x^2}{(n^2 + x^2)^2}.$$

En particulier, pour tout $(n, x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}_+$:

$$|f'_n(x)| \leqslant \frac{n^2 + x^2}{(n^2 + x^2)^2} = \frac{1}{n^2 + x^2} \leqslant \frac{1}{n^2}.$$

qui est le terme général d'une série convergente. La série de fonctions $\sum f'_n$ est donc normalement convergente sur $\mathbb{R}_+$. A fortiori, elle est uniformément convergente sur $\mathbb{R}_+$. D'après le théorème de dérivation sous le signe somme, f est donc de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n^2 - x^2}{(n^2 + x^2)^2}.$$

Il faut retenir que la convergence normale est le moyen le plus efficace de prouver une convergence uniforme. Il faut toujours commencer par étudier la convergence normale d'une série de fonctions et n'envisager de démontrer directement la convergence uniforme qu'en cas d'échec (voir exercice **9.7**).

Exercice 9.4 : Fonction ζ de Riemann

Pour $x \in]1, +\infty[$ on pose $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

1. Montrer que la fonction ζ est bien définie et continue sur $]1, +\infty[$.
2. Montrer que la fonction ζ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$ et exprimer ses dérivées sous forme de sommes de séries.
3. Préciser les variations de la fonction ζ et étudier sa convexité.
4. Déterminer $\lim_{x \to +\infty} \zeta(x)$.
5. Déterminer un équivalent simple de $\zeta(x)$ quand x tend vers 1. On pourra encadrer le terme général de la série définissant ζ à l'aide d'intégrales.
6. Représenter graphiquement la fonction ζ.

1. Commençons par montrer que la fonction ζ est bien définie, autrement dit, que la série de fonctions qui la définit est simplement convergente.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $f_n : x \mapsto \frac{1}{n^x}$. Soit $x \in]1, +\infty[$. La série

$$\sum_{n \geqslant 1} f_n(x) = \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^x}$$

est alors une série de Riemann convergente. Par conséquent, la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $]1, +\infty[$ et la fonction ζ est bien définie.

Nous nous intéressons, à présent, à la continuité de la fonction ζ. Commençons par remarquer que chacune des fonctions f_n, avec $n \geqslant 1$, est continue. La façon de faire la plus expéditive est d'étudier la convergence normale sur $]1, +\infty[$.

Pour tout $n \geqslant 1$, le meilleur majorant de $|f_n|$ sur $]1, +\infty[$ est $\frac{1}{n}$ et nous savons que la série $\frac{1}{n}$ diverge. Nous devrons donc nous contenter de la convergence normale sur tout segment.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est continue sur $]1, +\infty[$.
Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $1 < a < b$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons

$$\forall x \in [a, b], \quad |f_n(x)| = \frac{1}{n^x} \leqslant \frac{1}{n^a}$$

et donc $\|f_n\|_{\infty,[a,b]} \leqslant \frac{1}{n^a}$. La série $\sum \frac{1}{n^a}$ converge car $a > 1$. On en déduit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement (donc uniformément) sur tout segment contenu dans $]1, +\infty[$.
Par conséquent, la fonction ζ est continue sur $]1, +\infty[$.

2. Nous devons, à présent, montrer que la fonction ζ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]1,+\infty[$. Il faut pour ce faire montrer que f est de classe $\mathscr{C}^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Notons qu'il est facile de déterminer la forme des dérivées successives :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in]1,+\infty[, \quad f_n^{(p)}(x) = \frac{(-\ln(n))^p}{n^x}.$$

En effet, en écrivant $f_n(x) = \mathrm{e}^{-x\ln(n)}$, on voit que la dérivée de cette fonction est $-\ln(n)\mathrm{e}^{-x\ln(n)} = -\frac{\ln(n)}{n^x}$ soit $f_n'(x) = -\ln(n) f_n(x)$. Le facteur $-\ln(n)$ étant indépendant de x on en tire $f_n''(x) = -\ln(n) f_n'(x) = (-\ln(n))^2 f_n(x)$, etc. Ainsi, on voit qu'un facteur $-\ln(n)$ apparaît à chaque dérivation.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on sait que f_n est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]1,+\infty[$. Pour $p \in \mathbb{N}$ et $x \in]1,+\infty[$, on a

$$f_n^{(p)}(x) = \frac{(-\ln(n))^p}{n^x}.$$

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $1 < a < b$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons

$$\forall x \in [a,b], \quad \left|f_n^{(p)}(x)\right| \leqslant \frac{\ln(n)^p}{n^a}.$$

Soit $a' \in]1,a[$ (par exemple le milieu $a' = \dfrac{1+a}{2}$). Nous avons

$$\frac{(\ln(n))^p}{n^a} = o\left(\frac{1}{n^{a'}}\right).$$

Comme $a' > 1$, cette dernière série converge par le critère de Riemann. Ceci entraîne la convergence de la série $\sum \frac{(\ln(n))^p}{n^a}$ et on en déduit que la série de fonctions $\sum f_n^{(p)}$ converge normalement sur tout segment contenu dans $]1,+\infty[$. Pour $k \in \mathbb{N}$, les séries $\sum f_n^{(j)}$ convergent donc simplement (car normalement sur tout segment) sur $]1,+\infty[$ pour j entre 0 et $k-1$, et $\sum f_n^{(k)}$ converge normalement (donc uniformément) sur tout segment de $]1,+\infty[$. ζ est donc $\mathscr{C}^k$ sur $]1,+\infty[$.

Ceci valant pour tout $k \in \mathbb{N}$, ζ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]1,+\infty[$. Pour $k \in \mathbb{N}$ et $x \in]1,+\infty[$, on a alors

$$\zeta^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-\ln(n))^k}{n^x}.$$

3. Cette question est une simple application de la précédente : nous lirons le sens de variation de la fonction ζ sur sa dérivée et sa convexité sur sa dérivée seconde.

D'après la question précédente, nous avons

$$\forall x \in]1,+\infty[, \quad \zeta'(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(n)}{n^x} < 0.$$

Par conséquent, la fonction ζ est strictement décroissante sur $]1,+\infty[$.

De même, nous avons

$$\forall x \in]1,+\infty[, \quad \zeta''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(n)^2}{n^x} > 0.$$

Par conséquent, la fonction ζ est convexe sur $]1,+\infty[$.

Nous aurions également pu utiliser le fait que chacune des fonctions $x \mapsto \frac{1}{n^x}$ est décroissante et convexe. Cela assure que leur somme ζ est décroissante et convexe.

4. Nous voulons ici montrer que la fonction ζ possède une limite quand x tend vers $+\infty$ et la calculer. Il nous faut donc appliquer le théorème de la double limite. Pour cela, on a besoin de la convergence uniforme sur un intervalle ayant $+\infty$ comme extrémité. Comme nous l'avons vu au début de l'exercice, la série de fonctions définissant ζ n'est pas normalement convergente sur $]1,+\infty[$ mais l'est sur tout segment. Par un raisonnement analogue, nous pouvons voir qu'elle est normalement convergente sur tout intervalle du type $[a,+\infty[$ avec $a > 1$, ce qui assurera la possibilité d'intervertir limite en $+\infty$ et somme.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n possède une limite finie en $+\infty$. Précisément, nous avons

$$f_1(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \geqslant 2, \quad f_n(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

En outre, pour tout réel $x \geqslant 2$, $|f_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{n^2}$. Ainsi, pour tout entier $n \geqslant 1$, $\|f_n\|_{\infty,[2,+\infty[} \leqslant \dfrac{1}{n^2}$ qui est le terme général d'une série convergente. Ceci montre que la série $\sum f_n$ converge normalement (donc uniformément) sur $[2,+\infty[$.
On en déduit

$$\zeta(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} 0 = 1.$$

5. L'énoncé nous indique ici la méthode à utiliser : il s'agit d'une comparaison série intégrale. Nous allons encadrer le terme général de la série par des intégrales pour en déduire un encadrement de ζ.

Procédons en deux temps.
Nous avons

$$\forall t \in [n, n+1], \quad \frac{1}{n^x} \geqslant \frac{1}{t^x} \geqslant \frac{1}{(n+1)^x}$$

et donc, en intégrant sur le segment $[n, n+1]$,

$$\frac{1}{n^x} \geqslant \int_n^{n+1} \frac{1}{t^x}\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{1}{(n+1)^x}.$$

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. En sommant de $n=1$ à $n=N$, nous obtenons

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x} \geqslant \sum_{n=1}^{N} \int_n^{n+1} \frac{1}{t^x}\,\mathrm{d}t = \int_1^{N+1} \frac{1}{t^x}\,\mathrm{d}t \geqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(n+1)^x}.$$

La dernière inégalité permet d'obtenir :

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x} = 1 + \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{(n+1)^x} \leqslant 1 + \int_1^{N+1} \frac{1}{t^x}\,\mathrm{d}t.$$

Calculons cette dernière intégrale :

$$\int_1^{N} \frac{1}{t^x}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{1-x}}{1-x}\right]_1^N = \frac{N^{1-x}-1}{1-x}.$$

L'autre intégrale se calcule de même et on obtient l'encadrement

$$\frac{(N+1)^{1-x}-1}{1-x} \leqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x} \leqslant 1 + \frac{N^{1-x}-1}{1-x}.$$

En faisant tendre N vers $+\infty$, nous obtenons

$$\frac{1}{x-1} \leqslant \zeta(x) \leqslant 1 + \frac{1}{x-1}.$$

La technique d'encadrement par des intégrales nous fournit donc un résultat assez précis. A partir de celui-ci, nous pouvons deviner un équivalent de $\zeta(x)$ quand x tend vers 1 : ce sera $\frac{1}{x-1}$.

En multipliant cette inégalité par $x-1>0$ nous obtenons

$$1 \leqslant (x-1)\zeta(x) \leqslant x.$$

On en déduit que $(x-1)\zeta(x) \underset{x\to 1}{\longrightarrow} 1$ et donc

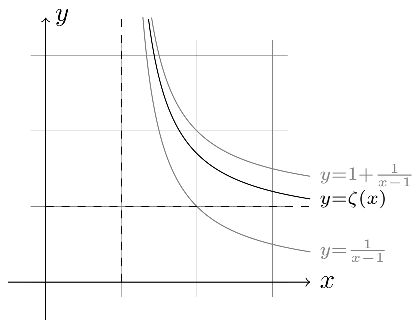
$$\zeta(x) \underset{x\to 1}{\sim} \frac{1}{x-1}.$$

6. Les questions qui précèdent nous permettent de nous faire une idée assez fidèle du graphe de la fonction ζ. Récapitulons : nous savons que la fonction ζ est de classe $\mathscr{C}^\infty$, strictement décroissante et convexe, d'après la question 3. Nous savons également, d'après la question 4, qu'elle tend vers 1 en $+\infty$ et donc que sa courbe possède une asymptote horizontale d'équation $y=1$. Pour finir, nous savons, d'après la question 5, qu'elle tend vers $+\infty$ en 1. Sa courbe possède donc une asymptote verticale d'équation $x=1$.

Ceci suffit pour tracer l'allure du graphe de ζ. Cependant, nous avons un résultat plus précis sur son comportement au voisinage de 1. En effet, pour tout réel $x > 1$:

$$\frac{1}{x-1} \leqslant \zeta(x) \leqslant 1 + \frac{1}{x-1}.$$

Nous pouvons donc tracer les représentations graphiques des fonctions $x \mapsto \frac{1}{x-1}$ et $x \mapsto 1 + \frac{1}{x-1}$: la représentation graphique de ζ doit se trouver entre ces deux courbes. Elles sont représentées en pointillés sur la figure suivante, ainsi que l'asymptote horizontale d'équation $y = 1$. Une fois tous ces éléments connus, on voit qu'il n'y a presque plus de choix pour tracer la courbe !



Pour améliorer le tracé, nous pouvons utiliser des points particuliers. Les valeurs prises par la fonction ζ ne sont pas aisées à calculer. Par exemple, nous avons

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \simeq 1{,}64 \quad \text{et} \quad \zeta(4) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} \simeq 1{,}08.$$

Exercice 9.5 : Régularité d'une série de fonctions

Pour $x \in \mathbb{R}_+$ on pose $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n(1+nx^2)}$.

1. Montrer que la fonction S est bien définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Montrer que S n'est pas dérivable en 0. On pourra commencer par montrer que $\dfrac{S(x)}{x}$ possède une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$ quand x tend vers 0.

1. Pour démontrer la continuité de la somme de la série nous allons utiliser la convergence normale de la série sur $\mathbb{R}_+$ ou, à défaut, sur tout segment. Rappelons que la convergence normale (éventuellement sur tout segment) entraîne la convergence simple et que ceci permet de montrer d'un seul coup que la fonction est bien définie et continue.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons

$$f_n : x \mapsto \frac{x}{n(1+nx^2)}.$$

La fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et nous avons

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f_n'(x) = \frac{1}{n} \times \frac{1+nx^2 - x(2nx)}{(1+nx^2)^2} = \frac{1-nx^2}{n(1+nx^2)^2}.$$

On en déduit que la fonction f_n est croissante sur $\left[0, \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{1}{\sqrt{n}}, +\infty\right]$. De plus, $f_n(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0 = f_n(0)$. On en déduit que

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad 0 \leqslant f_n(x) \leqslant f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Par conséquent, nous avons

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad |f_n(x)| \leqslant f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{2n\sqrt{n}}.$$

La série $\sum \frac{1}{n\sqrt{n}}$ converge par le critère de Riemann. On en déduit que la série $\sum f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}^+$. En particulier, elle converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ et sa somme, la fonction S, est bien définie.
En outre, pour tout $n \geqslant 1$, la fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}^+$. La convergence normale (donc uniforme) sur $\mathbb{R}^+$ de la série $\sum f_n$ assure que sa somme S est également continue sur $\mathbb{R}^+$.

Ici nous sommes parvenus à majorer $|f_n|$ sur tout son intervalle de définition et avons ainsi obtenu la convergence normale sur $\mathbb{R}_+$. Nous verrons dans la suite que parfois il faut se restreindre à des majorations sur tout segment plutôt que sur tout l'intervalle.

2. Pour démontrer que la fonction S est $\mathscr{C}^1$, étudions la convergence normale de la série $\sum f_n'$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Pour tout $n \geqslant 1$, la fonction f_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Nous avons

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f_n'(x) = \frac{1-nx^2}{n(1+nx^2)^2}.$$

Le meilleur majorant de $|f_n'|$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est $\frac{1}{n}$ (c'est sa limite en 0), mais la série de terme général $\frac{1}{n}$ diverge. Nous allons donc chercher à majorer $|f_n'|$ sur tout segment contenu dans $\mathbb{R}_+^*$ plutôt que sur $\mathbb{R}_+^*$ tout entier.

Soit $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ vérifiant $a < b$. Pour tout $x \in [a,b]$, nous avons

$$|f_n'(x)| = \left|\frac{1-nx^2}{n(1+nx^2)^2}\right| \leqslant \frac{1+n\,x^2}{n(1+n\,x^2)^2} \leqslant \frac{1}{n(1+n\,x^2)} \leqslant \frac{1}{(an)^2}$$

car $1+nx^2 \geqslant na^2$. La série de terme général $\dfrac{1}{(an)^2}$ converge. Par conséquent, la série $\sum f_n'$ converge normalement sur $[a,b]$.
Nous avons donc montré que la série $\sum f_n'$ converge normalement (donc uniformément) sur tout segment contenu dans $\mathbb{R}_+^*$. On en déduit que la fonction S est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. Ainsi que l'énoncé le suggère, nous allons commencer par démontrer que la fonction $\frac{S(x)}{x}$ possède une limite en 0 dans $\overline{\mathbb{R}}$. C'est typiquement le genre de résultat que l'on peut obtenir en utilisant le théorème de la limite monotone.

Le théorème de la double limite ne peut s'appliquer ici puisque la série définissant $\frac{S(x)}{x}$ ne converge normalement (ni uniformément) sur aucun intervalle dont 0 est une extrémité.

La fonction $x \mapsto \dfrac{S(x)}{x}$, définie sur $\mathbb{R}_+^*$, est somme d'une série de fonctions décroissantes ; elle est donc également décroissante. Par conséquent, elle possède une limite ℓ en 0 qui est soit sa borne supérieure, si elle est majorée, soit $+\infty$.

Nous cherchons à démontrer que la fonction S n'est pas dérivable en 0, et donc que la fonction $x \mapsto \frac{S(x)}{x}$ ne converge pas en 0. D'après ce qui précède, cela revient à montrer que $\ell = +\infty$. Notons que l'argument de monotonie précédent nous donne en plus le résultat suivant : ℓ, qu'il soit fini ou non, majore toutes les valeurs de $\frac{S(x)}{x}$.

Dans tous les cas, nous avons

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \frac{S(x)}{x} \leqslant \ell.$$

Pour tout $n \geqslant 1$, la fonction f_n est positive. Par conséquent, nous avons

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(1+n\,x^2)} \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(1+n\,x^2)} = \frac{S(x)}{x} \leqslant \ell.$$

En considérant la limite quand x tend vers 0, il vient

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \leqslant \ell.$$

Or on sait que le membre de gauche est une somme partielle d'une série à termes positif qui diverge ; il tend donc vers $+\infty$ lorsque N tend vers $+\infty$. On en déduit que $\ell = +\infty$. Par conséquent, la quantité

$$\frac{S(x) - S(0)}{x - 0} = \frac{S(x)}{x}$$

ne possède pas de limite finie lorsque x tend vers 0. On en déduit que la fonction S n'est pas dérivable en 0.

Plus précisément, le fait que $\dfrac{S(x)}{x}$ tende vers $+\infty$ en 0 nous assure que la courbe représentative de S possède une demi-tangente verticale en ce point.

Exercice 9.6 : Calcul d'intégrales à l'aide de séries de fonctions

En faisant apparaître des séries de fonctions calculer les deux intégrales suivantes :

1. $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x-1}\,\mathrm{d}x$ **2.** $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{\mathrm{sh}(x)}\,\mathrm{d}x.$

On donne : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

1. Il ne faut pas oublier de démontrer que l'intégrale I est bien définie. Cependant, ici, nous allons devoir utiliser le théorème d'intégration terme à terme, qui démontrera la convergence de cette intégrale.

L'énoncé suggère de faire apparaître des séries de fonctions. Nous allons utiliser le développement simple et classique de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ puis essayer d'intervertir intégrale et somme.

Ici, même si les bornes de l'intégrale sont finies, il s'agit d'une intégrale impropre. Il faut donc employer le théorème d'intégration terme à terme.

Pour tout $x \in]0, 1[$, nous avons

$$\frac{\ln(x)}{x-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} -\ln(x)x^n.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction

$$f_n : x \mapsto -\ln(x)x^n$$

est continue sur l'intervalle $]0, 1[$ et intégrable (si $n \geqslant 1$ elle possède des limites finies en 0 et 1 ; si $n = 0$, c'est la fonction $-\ln$ qu'on sait être intégrable sur cet intervalle).

La série $\sum f_n$ converge simplement sur $]0,1[$ vers la fonction f, qui est continue sur cet intervalle.

Nous devons maintenant calculer l'intégrale de la fonction $|f_n|$ pour tout n et montrer que c'est le terme général d'une série convergente. Remarquons déjà que, f_n étant positive, $|f_n| = f_n$. Nous voudrions éliminer le logarithme à l'aide d'une intégration par parties.

Les $x \mapsto -\ln(x)$ et $x \mapsto \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,1[$. Par intégration par parties, on a donc :

$$\int_0^1 -\ln(x)x^n\,\mathrm{d}x = \left[-\ln(x)\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{x^n}{n+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{(n+1)^2},$$

la seconde intégrale étant clairement convergente, et la limite en 0 du crochet valant 0 par croissance comparée.

On en déduit que la série $\sum \displaystyle\int_0^1 |f_n|$ converge.

D'après le théorème d'intégration terme à terme, la fonction f est intégrable sur $]0,1[$ (donc I existe) et nous avons

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x-1}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 -\ln(x)x^n\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

En effectuant le changement de variable $u = 1-x$ on voit que

$$I = -\int_0^1 \frac{\ln(1-u)}{u}\,\mathrm{d}u.$$

Nous aurions pu conclure par un raisonnement en tout analogue en utilisant le développement en série entière de $\ln(1-u)$.

2. Nous allons procéder ici de la même façon que pour la question précédente. Comme précédemment, l'intégrabilité sera conséquence du théorème d'intégration terme à terme.

Nous allons chercher à faire intervenir des séries de fonctions mais ici, la situation n'est pas aussi simple. Notons tout d'abord qu'un développement en somme de séries entières est inutile si on cherche à permuter série et intégrale sur un intervalle non majoré comme $\mathbb{R}_+$: nous obtiendrions en effet une expression de la forme $\sum \int_0^{+\infty} a_n x^n\,\mathrm{d}x$ et les intégrales sont divergentes si $a_n \neq 0$. De toutes façons, développer g en série entière n'a rien d'évident.

Nous allons plutôt faire aparaître une série géométrique à l'aide de l'exponentielle apparaissant dans la définition du sinus hyperbolique.

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, nous avons

$$\frac{x}{\operatorname{sh}(x)} = \frac{2x}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}} = \frac{2x\mathrm{e}^{-x}}{1-\mathrm{e}^{-2x}} = 2x\mathrm{e}^{-x}\sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-2nx} = \sum_{n=0}^{+\infty} 2x\mathrm{e}^{-(2n+1)x}.$$

Nous avons maintenant trouvé le développement en série recherché. Il ne nous reste plus qu'à appliquer le théorème d'intégration terme à terme (sans oublier d'en vérifier explicitement les hypothèses !) afin d'inverser somme et intégrale.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction

$$g_n : x \mapsto 2x\mathrm{e}^{-(2n+1)x}$$

est continue sur l'intervalle $]0, +\infty[$ et intégrable : elle se prolonge par continuité en 0 et par croissance comparée, $x^2 g_n(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $g_n(x) = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

La série $\sum g_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$ vers la fonction $g : x \mapsto \dfrac{\operatorname{sh} x}{x}$, qui est continue sur cet intervalle.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculons l'intégrale de $|g_n| = g_n$ sur $\mathbb{R}_+$ par une intégration par parties. Comme les fonctions $u : x \mapsto 2x$ et $v : x \mapsto -\dfrac{\mathrm{e}^{-(2n+1)x}}{2n+1}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et vérifient $u(x)v(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, nous obtenons

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} 2x\mathrm{e}^{-(2n+1)x}\,\mathrm{d}x &= \left[-2x\,\frac{\mathrm{e}^{-(2n+1)x}}{2n+1}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} 2\,\frac{\mathrm{e}^{-(2n+1)x}}{2n+1}\,\mathrm{d}x \\ &= \left[-2\,\frac{\mathrm{e}^{-(2n+1)x}}{(2n+1)^2}\right]_0^{+\infty} = \frac{2}{(2n+1)^2},\end{aligned}$$

On en déduit que la série $\sum \int_0^{+\infty} |g_n|$ converge.

Par le théorème d'intégration terme à terme, la fonction g est intégrable sur $]0, +\infty[$ et nous avons

$$\int_0^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} g_n(x)\,\mathrm{d}x = 2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}.$$

L'énoncé nous fournit la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$. Nous allons donc nous ramener à cette dernière.

Etant donné $N \in \mathbb{N}^*$ nous avons

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} &= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} - \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} \\ &= \frac{3}{4}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}.\end{aligned}$$

Finalement, nous obtenons

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{\operatorname{sh}(x)}\,\mathrm{d}x = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{4}.$$

Exercice 9.7 : Intégration et convergence uniforme

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle décroissante tendant vers 0. On fixe $p \in \mathbb{N}^*$ et on pose, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$, $f_n(x) = (-1)^n a_n x^{pn}$.
1. Donner un exemple de suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la série $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur $[0,1]$.
2. Démontrer que la série $\sum f_n$ converge uniformément sur $[0,1]$.
3. En déduire une expression de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{pn+1}$ à l'aide d'une intégrale.
Indication : dans un premier temps, faire intervenir une intégrale entre 0 et z pour $z \in [0,1[$, puis justifier le passage à la limite $z \to 1$.

Notons que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant décroissante et de limite nulle, elle est à valeurs positives.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On se convainc aisément que la norme uniforme de la fonction f_n sur $[0,1]$ est a_n. Par conséquent, il suffit de trouver une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante tendant vers 0 telle que la série $\sum a_n$ diverge. La suite $\left(\frac{1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait toutes ces conditions (le décalage d'indice n'est présent que pour que la suite soit bien définie à partir du rang $n = 0$).

Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $a_n = \dfrac{1}{n+1}$. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs réelles, décroissante et tend vers 0.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Nous avons

$$\forall x \in [0,1], \quad |f_n(x)| = \left|\frac{(-1)^n}{n+1}\, x^{pn}\right| \leqslant \frac{1}{n+1}$$

car $|x| \leqslant 1$. En outre, nous avons

$$|f_n(1)| = \left|\frac{(-1)^n}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1}$$

et, par conséquent, $\|f_n\|_{\infty,[0,1]} = \dfrac{1}{n+1}$ qui est le terme général d'une série divergente.
En conséquence, la série $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur $[0,1]$.

2. Nous savons que toute série de fonctions normalement convergente est uniformément convergente, ce qui est souvent un moyen simple de montrer la convergence uniforme d'une série de fonctions. Cependant, ici, la question précédente montre que

nous ne pourrons pas utiliser ce procédé. Nous allons donc revenir à la définition de la convergence uniforme.
Dans un premier temps, nous allons démontrer la convergence simple de la série $\sum f_n$. Sa forme nous invite à utiliser le critère spécial des séries alternées. C'est le même argument qu'à l'exercice **9.3**.

La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle décroissante tendant vers 0. Par conséquent, tous ses termes sont positifs.
Soit $x \in [0,1]$. Puisque $x \geqslant 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le réel $f_n(x) = (-1)^n a_n x^{pn}$ est du signe de $(-1)^n$. On en déduit que la série $\sum f_n(x)$ est alternée.
Puisque $x \in [0,1]$, la suite $(x^{pn})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Par hypothèse, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est également décroissante. Le produit de deux suites positives décroissantes est également décroissant donc $(a_n x^{pn})_{n\in\mathbb{N}} = (|f_n(x)|)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
Puisque $|x| \leqslant 1$, nous avons $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f_n(x)| \leqslant a_n$. On en déduit que la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.
Nous pouvons en conclure, d'après le critère spécial des séries alternées, que la série $\sum f_n(x)$ converge. Nous noterons $f(x)$ sa limite.

Pour montrer qu'elle converge uniformément, il faut montrer que le reste converge uniformément vers 0. On utilise donc la majoration du reste fournie par le critère spécial.

Soit $x \in [0,1]$. Le critère spécial des séries alternées assure que, pour tout $N \in \mathbb{N}$, nous avons

$$\left| f(x) - \sum_{n=0}^{N} f_n(x) \right| = \left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} f_n(x) \right| \leqslant |f_{N+1}(x)| \leqslant a_{N+1},$$

car $a_{N+1} \geqslant 0$ et $|x| \leqslant 1$.
Par conséquent, pour tout $N \in \mathbb{N}$, nous avons

$$\left\| f - \sum_{n=0}^{N} f_n \right\|_{\infty,[0,1]} \leqslant a_{N+1} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0.$$

Nous en déduisons que la série $\sum f_n$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

3. L'énoncé nous suggère de faire intervenir une intégrale. Nous pouvons espérer qu'ensuite, le résultat de convergence uniforme démontré à la question précédente nous permettra d'échanger somme et intégrale. En effet, lorsqu'une série converge uniformément sur un segment, on peut intervertir intégrale et somme. Nous pouvons donc commencer par écrire le terme général de la série comme une intégrale.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ nous avons

$$\frac{(-1)^n}{pn+1} = \int_0^1 (-1)^n x^{pn}\,\mathrm{d}x.$$

L'idée est ensuite de permuter somme et intégrale. Nous allons donc introduire la série de fonctions $\sum (-1)^n x^{pn}$. Nous voyons tout de suite qu'il y a un problème : cette série est bien convergente pour $x \in [0,1[$ (de somme $\frac{1}{1+x^p}$) mais diverge pour $x = 1$. Ceci explique pourquoi l'énoncé suggère de raisonner en s'écartant de 1.

Posons $g : x \mapsto \dfrac{1}{1+x^p}$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, posons $g_n : x \mapsto (-1)^n x^{pn}$.

Nous ne sommes pas ici dans un cas d'application directe de la question précédente. En effet, la suite de fonctions considérée ici correspond à la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ constante égale à 1 et cette dernière ne satisfait pas les conditions de l'énoncé (elle ne tend pas vers 0). D'ailleurs, la série ne risque pas de converger uniformément sur le segment $[0,1]$ puisque, comme nous l'avons remarqué plus haut, elle diverge en 1 !

L'indication nous invite à intégrer d'abord sur des intervalles de la forme $[0,z]$, avec $z < 1$. Nous allons donc chercher à démontrer la convergence uniforme de la série $\sum g_n$ sur $[0,z]$.

Soit $z \in [0,1[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $\|g_n\|_{\infty,[0,z]} = z^{pn}$, qui est le terme général d'une série convergente, car $|z| < 1$. On en déduit que la série $\sum g_n$ converge normalement vers g sur $[0,z]$.
Par conséquent, nous avons

$$\begin{aligned}\int_0^z \frac{1}{1+x^p}\,\mathrm{d}x &= \int_0^z \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{pn}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^z (-1)^n x^{pn}\,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{pn+1}}{pn+1}.\end{aligned}$$

Le cours sur les séries entières permet de rédiger ceci de manière plus concise.

Il ne nous reste plus, à présent, qu'à faire tendre z vers 1.
Le membre de gauche ne pose pas de problème : en effet, la fonction $z \mapsto \int_0^z \frac{1}{1+x^p}\,\mathrm{d}x$ n'est autre que la primitive de $x \mapsto \frac{1}{1+x^p}$ sur $[0,1]$ nulle en 0. Cette fonction est donc continue (et même dérivable, de dérivée $x \mapsto \frac{1}{1+x^p}$).
Pour calculer la limite du membre de droite, nous allons nous intéresser à la continuité de cette somme. C'est là qu'intervient la convergence uniforme démontrée à la question précédente. Il faut simplement faire attention en rédigeant, la puissance de z étant ici $pn+1$ et non pn.

D'après la question précédente appliquée à la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\dfrac{1}{pn+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, qui est bien décroissante et de limite nulle, la série de fonctions $\sum (-1)^n \dfrac{z^{pn}}{pn+1}$ converge uniformément sur $[0,1]$.

En outre, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $z \mapsto (-1)^n \dfrac{z^{pn}}{pn+1}$ est continue sur $[0,1]$. On en déduit que la somme de cette série l'est encore. En multipliant par z, nous voyons donc que le membre de droite de la dernière égalité est une fonction continue de z pour $z \in [0,1]$.

Par conséquent, nous avons

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{pn+1}}{pn+1} \underset{z\to 1}{\longrightarrow} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{pn+1}.$$

En outre, la continuité de la primitive s'annulant en 0 de $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^p}$ assure que nous avons

$$\int_0^z \frac{1}{1+x^p}\,\mathrm{d}x \underset{z\to 1}{\longrightarrow} \int_0^1 \frac{1}{1+x^p}\,\mathrm{d}x.$$

En utilisant l'égalité démontrée précédemment, nous obtenons finalement

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{pn+1} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^p}\,\mathrm{d}x.$$

Pour $p = 1$ ou 2 on retrouve les deux sommes classiques :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln(2) \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

Pour de plus grandes valeurs de p, une décomposition en éléments simples permet de calculer l'intégrale du second membre sans problème.

Exercice 9.8 : Fonction θ de Jacobi

On pose $\theta : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n^2 \pi x}$ et on rappelle que si $s \in \mathbb{C}$,

$$\zeta(s) = \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^s} \text{ si } \operatorname{Re} s > 1 \quad \text{et} \quad \Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\, t^{s-1} dt \text{ si } \operatorname{Re} s > 0.$$

1. Donner l'intervalle de définition de la fonction θ, et montrer qu'elle est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur son intervalle.
2. Montrer que pour $s \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re}(s) > 1$, on a

$$\int_0^{+\infty} \theta(t) t^{\frac{s}{2}-1}\, \mathrm{d}t = \pi^{-s/2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s).$$

1. Il faut déterminer les valeurs de x pour lesquelles la série converge. Pour $x \leqslant 0$ la série diverge grossièrement, sinon on utilise la règle de Riemann : on multiplie le terme général par n^2 et on constate que le résultat tend vers 0.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $u_n : x \mapsto e^{-n^2 \pi x}$.
Pour $x = 0$, $u_n(x) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$, et pour $x < 0$, $u_n(x) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc la série diverge grossièrement.
Si $x \in \mathbb{R}_+^*$, par croissance comparée, $n^2\, u_n(x) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $u_n(x) = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
Par le critère de Riemann (et de comparaison des séries à termes positifs), $\sum u_n$ converge sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi θ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

Il faut ensuite montrer que cette fonction est de classe $\mathscr{C}^\infty$, c'est-à-dire qu'elle est $\mathscr{C}^k$ pour tout k. On doit donc vérifier que les fonctions sommées sont bien C^∞ et qu'il y a convergence normale de toutes les dérivées. Il n'y a pas ici convergence normale sur $\mathbb{R}_+^*$ tout entier, on se restreint donc à un segment.

Pour $n \in \mathbb{N}$, u_n est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour $k \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$u_n^{(k)}(x) = (-n^2\, \pi)^k e^{-n^2 \pi x}.$$

Soit $a < b \in \mathbb{R}_+^*$. Pour $x \in [a, b]$, $|u_n^{(k)}(x)| \leqslant (n^2\, \pi)^k e^{-n^2 \pi a}$, et comme $n^2 (n^2\, \pi)^k e^{-n^2 \pi a} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ (par le théorème de croissance comparée), $(n^2\, \pi)^k e^{-n^2 \pi a} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ est le terme général d'une série convergente (par le critère de Riemann et de comparaison des séries à termes positifs).
Ainsi $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(k)}$ converge normalement (donc uniformément) sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$. Pour les j entre 0 et $k-1$, $\sum u_n^{(j)}$ converge normalement sur tout segment

de $\mathbb{R}_+^*$, donc elle converge simplement sur cet intervalle. Ainsi θ est de classe $\mathscr{C}^k$.
Ceci vaut pour tout $k \in \mathbb{N}$, donc θ est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. L'intégrale à calculer est l'intégrale (impropre) d'une série de fonctions, il faut donc appliquer le théorème d'intégration terme à terme.

Sous réserve de justifications, on a (en posant le changement de variable affine $u = n^2\pi t$ dans l'intégrale) :

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \theta(t) t^{\frac{s}{2}-1}\,\mathrm{d}t &= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-n^2\,\pi\,t} t^{\frac{s}{2}-1}\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{u} \left(\frac{u}{n^2\,\pi}\right)^{\frac{s}{2}-1} \frac{\mathrm{d}u}{n^2\,\pi} \\
&= \pi^{-\frac{s}{2}} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u} u^{\frac{s}{2}-1}\,\mathrm{d}u = \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s).
\end{aligned}$$

Il nous reste donc à vérifier les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $v_n : t \mapsto \mathrm{e}^{-n^2\,\pi\,t} t^{\frac{s}{2}-1}$, continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$.
Pour $t \in \mathbb{R}_+^*$, notant $v = \operatorname{Re} s$, on a

$$|v_n(t)| = \mathrm{e}^{-n^2\,\pi\,t} t^{\frac{v}{2}-1} \underset{t\to 0}{\sim} t^{\frac{v}{2}-1},$$

intégrable en 0 par le critère de Riemann (puisque $\operatorname{Re} s > 1$ donc > 0). En $+\infty$, on a $t^2|v_n(t)| \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (par croissance comparée), donc $|v_n(t)| = \underset{t\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$, ce qui montre que $|v_n(t)|$ est intégrable en $+\infty$ par le critère de Riemann.
La fonction u_n est donc intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. La série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n$ converge simplement vers $t \mapsto \theta(t)t^{\frac{s}{2}-1}$, continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$ (car θ l'est par la question précédente).

L'hypothèse $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n$ est une fonction continue par morceaux sur l'intervalle d'intégration est essentielle, mais fréquemment oubliée par les étudiants !

Enfin, il faut vérifier que $\displaystyle\int_0^{+\infty} |v_n(t)|\,\mathrm{d}t$ est le terme général d'une série convergente. Or, avec le calcul précédent,

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty} |v_n(t)|\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-n^2\,\pi\,t} t^{\frac{v}{2}-1}\,\mathrm{d}t$$
$$= \pi^{-\frac{v}{2}}\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{\mathrm{Re}\,s}}$$

qui converge puisque $\mathrm{Re}\,s > 1$, par le critère de Riemann. Le calcul vu plus haut est donc bien justifié.

Il ne faut pas hésiter à vérifier d'abord que le calcul aboutit bien au résultat souhaité, avant de vérifier les hypothèses (plutôt lourdes) du théorème d'intégration terme à terme.

CHAPITRE

10

Séries entières

Exercice 10.1 : Calculs de sommes de séries numériques

Calculer les sommes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{2^n}$$

L'idée est de partir la série entière $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n$, dont on peut déduire d'autres séries par primitivation (ce qui donnera le terme en $\frac{1}{n}$) et dérivation (ce qui donnera le terme en n puis en n^2 si l'on dérive deux fois). En choisissant ensuite $x = \frac{1}{2}$, on pourra obtenir les sommes cherchées.

Pour pouvoir intégrer ou dériver terme à terme la série entière, il faut se placer dans l'intervalle ouvert de convergence.

On peut dériver et intégrer terme à terme la série $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x}$ à l'intérieur de l'intervalle de convergence $]-1,1[$ (son rayon de convergence étant 1 d'après le cours). On a donc, pour $x \in]-1,1[$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = \int_0^x \left(\sum_{n=1}^{+\infty} t^{n-1} \right) \mathrm{d}t = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t} = -\ln(1-x)$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nx^n = x \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = xf'(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2x^n = x^2 \sum_{n=1}^{+\infty} n^2x^{n-2} = x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} + x \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}$$

$$= x^2 f''(x) + xf'(x) = \frac{2x^2}{(1-x)^3} + \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Il reste à effectuer la substitution par $x = \frac{1}{2}$, qui est bien dans $]-1,1[$.

En remplaçant x par $\frac{1}{2}$, qui appartient bien à l'intervalle ouvert de convergence, on obtient :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n} = -\ln\left(1-\frac{1}{2}\right) = \ln(2) \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n} = \frac{\frac{1}{2}}{(1-\frac{1}{2})^2} = 2$$

et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{2^n} = \frac{2(\frac{1}{2})^2}{(1-\frac{1}{2})^3} + \frac{\frac{1}{2}}{(1-\frac{1}{2})^2} = 4+2 = 6.$$

Exercice 10.2 : Calculs de rayons de convergence avec la définition

Les deux questions sont indépendantes.

1. Soit (a_n), (b_n), (c_n) des suites numériques telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |a_n| \leqslant |b_n| \leqslant |c_n|.$$

On suppose que les séries entières $\sum a_n\, z^n$ et $\sum c_n\, z^n$ ont le même rayon de convergence R. Que peut-on dire du rayon de convergence de $\sum b_n\, z^n$?

2. Soit (a_n) une suite réelle. Comparer les rayons de convergence R_1 de $\sum a_n\, z^n$ et R_2 de $\sum a_n^2\, z^n$.

Quand la règle de d'Alembert ne peut pas être utilisée, il faut revenir à la définition : le nombre R est la borne supérieure des ensembles des réels $r > 0$ tels que, au choix :

- $\sum a_n\, r^n$ converge (absolument) ;
- $(|a_n|\, r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est borné ;
- $(a_n\, r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

1. L'hypothèse va nous permettre de comparer facilement les termes généraux des séries $|a_n|\, r^n$, $|b_n|\, r^n$ et $|c_n|\, r^n$. On utilise donc la définition du rayon de convergence avec les convergences absolues (on pourrait également utiliser celle avec les suites bornées ou qui convergent vers 0).

Pour $n \in \mathbb{N}$, et $r \in \mathbb{R}_+$, comme $r^n \geqslant 0$, l'hypothèse entraîne :

$$|a_n|\, r^n \leqslant |b_n|\, r^n \leqslant |c_n|\, r^n.$$

Notons R' le rayon de convergence de $\sum b_n\, z^n$.

- Pour r tel que $r < R$ on a $\sum |c_n|\, r^n$ qui converge. Il en est donc de même de $\sum |b_n|\, r^n$. Ainsi $\sum b_n\, r^n$ converge absolument, donc $r \leqslant R'$. On vient de démontrer :

$$\forall r \in \mathbb{R}_+, \quad r < R \implies r \leqslant R'$$

ce qui implique $R \leqslant R'$.

- Pour r tel que $r > R$ on a $\sum |a_n|\, r^n$ qui diverge. Il en est donc de même de $\sum |b_n|\, r^n$. Ainsi $\sum b_n\, r^n$ ne converge pas absolument, donc $r \geqslant R'$. On vient de démontrer :
$$\forall r \in \mathbb{R}_+, \quad r > R \implies r \geqslant R'$$
ce qui implique $R \geqslant R'$.

La série entière $\sum b_n\, z^n$ a donc un rayon de convergence égal à R.

Lorsqu'on revient à la définition du rayon de convergence, il faut toujours montrer séparément deux inégalités pour avoir une égalité de rayons de convergence.

Exemple d'application : (vu en oraux) Soit b_n la n-ième décimale non nulle de π. On a $1 \leqslant b_n \leqslant 9$, avec $\sum z^n$ et $\sum 9\, z^n$ de même rayon de convergence (1), donc $\sum b_n z^n$ a pour rayon de convergence 1.

2. On fait facilement le lien entre $a_n r^n$ et $a_n^2 r^{2n}$. Il faut ici utiliser la définition du rayon de convergence utilisant les suites bornées, ou qui tendent vers 0.

La réciproque du critère de d'Alembert est fausse, on ne peut donc pas écrire
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|r^{n+1}}{|a_n|r^n} = \frac{r}{R_1} \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}^2 r^{2n+2}}{a_n^2 r^{2n}} = \frac{r^2}{R_2}.$$

On peut en revanche utiliser ce raisonnement faux pour intuiter que $R_2 = R_1^2$.

Comme plus haut, on montre deux inégalités entre R_2 et R_1^2.

- Soit $r \in \mathbb{R}_+$ tel que $r < R_1$, alors on a : $a_n\, r^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Ceci entraîne $a_n^2\, r^{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, soit $r^2 \leqslant R_2$, ou encore $r \leqslant \sqrt{R_2}$. On vient de démontrer :
$$\forall r \in \mathbb{R}_+, \quad r < R_1 \implies r \leqslant \sqrt{R_2}$$
ce qui montre que $R_1 \leqslant \sqrt{R_2}$.
- Soit $r \in \mathbb{R}_+$ tel que $r < R_2$, alors on a : $a_n^2\, r^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Ceci entraîne, avec $u = \sqrt{r}$: $(a_n\, u^n)^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, puis $a_n\, u^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, soit $u \leqslant R_1$, ou encore $r = u^2 \leqslant R_1^2$. On vient de démontrer :
$$\forall r \in \mathbb{R}_+, \quad r < R_2 \implies r \leqslant R_1^2$$
ce qui montre que $R_2 \leqslant R_1^2$.

En conclusion, $R_2 = R_1^2$.

Exercice 10.3 : Calculs de rayons de convergence à l'aide la règle de d'Alembert

Déterminer le rayon de convergence des séries entières

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{i}^n n^2}{(n^2+1)2^n} z^n$ **2.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{ch}(n)}{\mathrm{sh}^2(n)} z^{2n}$

Pour une série entière $\sum a_n z^n$, on détermine souvent R à partir de la règle de d'Alembert : si a_n est non nul (au moins à partir d'un certain rang), et si $\frac{|a_{n+1}|r^{n+1}}{|a_n|r^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ (avec $r > 0$) la série $\sum a_n r^n$ converge si $\ell < 1$ et diverge si $\ell > 1$.

1. Ici, le critère s'applique sans problème.

On a, pour $n \in \mathbb{N}^*$ (en notant $a_n = \dfrac{i^n n^2}{(n^2+1)2^n}$) et $r > 0$

$$\frac{|a_{n+1}|\, r^{n+1}}{|a_n|\, r^n} = \frac{(n+1)^2 r^{n+1}}{2^{n+1}((n+1)^2+1)} \times \frac{2^n(n^2+1)}{n^2 r^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{r}{2}$$

donc $\sum a_n r^n$ diverge si $r > 2$ et converge si $r < 2$ par le critère de d'Alembert. Ainsi le rayon de convergence cherché est $R = 2$.

2. Ici, seules les puissances paires interviennent, mais on peut toujours appliquer le critère de d'Alembert aux séries de terme général $a_{2n} r^{2n}$.

Il est toujours plus sûr d'appliquer ce critère aux séries numériques, justement pour le cas où l'on a une série entière où la moitié des a_n sont nuls. Un éventuel critère de d'Alembert sur les séries entières n'est de toute façon pas au programme.

La quantité $a_n = \dfrac{\mathrm{ch}\, n}{\mathrm{sh}^2\, n}$ est définie pour $n \geqslant 1$. Cherchons d'abord un équivalent :

$$a_n = \frac{2(\mathrm{e}^n + \mathrm{e}^{-n})}{(\mathrm{e}^n - \mathrm{e}^{-n})^2} = \frac{2\mathrm{e}^n(1+\mathrm{e}^{-2n})}{\mathrm{e}^{2n}(1-\mathrm{e}^{-2n})^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{\mathrm{e}^n}.$$

On a donc pour $r > 0$:

$$\frac{\left|a_{n+1}\, r^{2(n+1)}\right|}{\left|a_n\, r^{2n}\right|} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{\mathrm{e}^{n+1}} \times \frac{\mathrm{e}^n}{2} \times r^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{r^2}{\mathrm{e}}.$$

Ainsi, par le critère de d'Alembert (sur les séries), $\sum a_n r^{2n}$ converge si $r^2 < \mathrm{e}$ et diverge si $r^2 > \mathrm{e}$. Le rayon de convergence cherché est donc $R = \sqrt{\mathrm{e}}$.

Exercice 10.4 : Domaine de convergence

On considère la série entière de terme général $u_n x^n$, avec

$$\forall n \geqslant 2, \quad u_n = \ln\left[\frac{(-1)^n + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\right].$$

Déterminer son rayon de convergence R et étudier la convergence de la série pour $x = \pm R$.

Pour faciliter la recherche de limite utilisée dans la règle de d'Alembert, il faut commencer par déterminer un équivalent de u_n quand n tend vers l'infini. Pour ceci, on pense aux développements limités.
Pour l'étude aux bornes, on aura besoin d'avoir deux termes non nuls dans ce développement.

- **Calculs préalables**

  Dans le quotient, factorisons le terme dominant au numérateur et au dénominateur :

$$\begin{aligned}\frac{(-1)^n + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} &= \frac{\sqrt{n}\left[\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + 1\right]}{\sqrt{n}\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = \left[\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + 1\right] \times \left[1 + \frac{1}{n}\right]^{-\frac{1}{2}} \\ &= \left[1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right] \times \left[1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right] \\ &= 1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).\end{aligned}$$

  Comme $\ln(1+u) = u - \dfrac{u^2}{2} + o(u^2)$, on en déduit :

$$\begin{aligned}u_n &= \left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n}\right)^2 + o\left(\frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).\end{aligned}$$

  On a donc : $|u_n| \sim \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

- **Rayon de convergence**

  Pour $r > 0$, on a donc

$$\frac{|u_{n+1}|\, r^{n+1}}{|u_n|\, r^n} \sim \frac{\sqrt{n} r}{\sqrt{n+1}} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} r$$

  et la série $\sum u_n r^n$ converge si $r < 1$, diverge si $r > 1$ par le critère de d'Alembert. Ainsi le rayon de convergence de la série entière est $R = 1$.

À ce stade, on ne sait rien de la nature de la série pour $x = \pm 1$: chaque cas particulier doit être étudié spécifiquement. Bien sûr, les calculs précédents fournissent dans ce cas un équivalent simple.

Étudions la nature pour $x = \pm 1$.

- **Étude pour** $x = -1$

  On a alors : $u_n(-1)^n \sim \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. La série de terme général $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ est positive et divergente (série de Riemann). On peut donc en déduire que $\sum u_n(-1)^n$ diverge. La série entière diverge pour la borne $x = -1$.

- **Étude pour** $x = 1$

  On a alors : $u_n(1)^n \sim \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, mais on ne peut rien en déduire puisque le théorème de comparaison suppose les séries de signe constant à partir d'un certain rang. On sait que

  $$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

  La série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge d'après le critère des séries alternées. La série de terme général $v_n = -\dfrac{1}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ vérifie $v_n \sim -\dfrac{1}{n}$. Le théorème de comparaison s'applique puisque $-\dfrac{1}{n}$ est de signe constant et, comme cette dernière série diverge, la série de terme général v_n diverge.
  Finalement, la série de terme général u_n, somme d'une série convergente et d'une série divergente, est divergente (si elle convergeait, la série $\sum v_n$ convergerait par combinaison linéaire de séries convergentes).
  La série entière diverge pour la borne $x = 1$.

Pour pouvoir conclure sur la convergence de la série de terme général u_n à partir d'un équivalent de u_n, et équivalent doit avoir un signe constant, au moins à partir d'un certain rang.

Exercice 10.5 : Développement d'une fonction en série entière

Développer en série entière la fonction définie par :

$$f_\alpha(x) = \arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)$$

où $\alpha \in]0, \pi[$. On pourra commencer par regarder f'_α

Commençons par étudier l'intervalle de définition de f_α. On suit ensuite l'indication, en dérivant.

Pour que f_α existe, il faut $\alpha \not\equiv \pi \ [2\pi]$ ce qui est le cas par hypothèse f_α est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, et on a :

$$\begin{aligned} f'_\alpha(x) &= \frac{\frac{2}{(1-x)^2}\ \tan\frac{\alpha}{2}}{1+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2 \tan^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}}{(1-x)^2\cos^2\frac{\alpha}{2}+(1+x)^2\sin^2\frac{\alpha}{2}} \\ &= \frac{\sin(\alpha)}{(1+x^2)(\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2})-2x(\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2})} \\ &= \frac{\sin(\alpha)}{x^2-2\cos\alpha\, x+1}. \end{aligned}$$

Dans $\mathbb{C}[X]$, la décomposition en éléments simples de $f'_\alpha(x)$ est de la forme :

$$\frac{\sin(\alpha)}{X^2-2\cos\alpha\, X+1} = \frac{\lambda}{X-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}} + \frac{\mu}{X-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}}, \quad (\lambda,\mu)\in\mathbb{C}^2$$

On évalue $(X-e^{\mathrm{i}\alpha})f'_\alpha(X)$ en $e^{\mathrm{i}\alpha}$ pour trouver $\lambda = \dfrac{1}{2i}$. De même, on calcule $\mu = -\dfrac{1}{2i}$. Ainsi :

$$f'_\alpha(x) = \frac{\sin(\alpha)}{(x-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha})(x-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha})} = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left[\frac{1}{x-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}} - \frac{1}{x-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}}\right]$$

Dans les deux dernières fractions rationnelles, on va factoriser pour pouvoir utiliser le développement connu : $\frac{1}{1-z} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} z^n$ avec la condition à surveiller : $|z| < 1$, et l'objectif d'aboutir à des séries entières par rapport à x.

On a :

$$f'_\alpha(x) = \frac{\mathrm{i}}{2}\left[\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}}{1-x\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}} - \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}}{1-x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}}\right]$$

À condition que $|x| < 1$, on en déduit :

$$f'_\alpha(x) = \frac{\mathrm{i}}{2}\left[\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\,\mathrm{e}^{-(n+1)\mathrm{i}\alpha} - \sum_{n=0}^{+\infty} x^n\,\mathrm{e}^{(n+1)\mathrm{i}\alpha}\right]$$

soit encore :

$$f'_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \sin(n+1)\alpha.$$

Ce développement a d'abord été obtenu comme somme de deux séries entières de rayon 1. Son rayon est donc $R \geqslant 1$.

On sait simplement que le rayon de convergence obtenu est plus grand que 1 (puisqu'on travaillait avec des séries de rayon de convergence 1) mais il pourrait être strictement plus grand.
On peut montrer que la suite de terme général $\sin((n+1)\alpha)$ ne tend pas vers 0, on a donc $R = 1$ (puisque la série diverge grossièrement en $x = 1$) mais ce n'est pas nécessaire pour la suite.

En intégrant terme à terme sur $]-1,1[$, avec $f_\alpha(0) = \dfrac{\alpha}{2}$ (puisque $\alpha \in]0,\pi[$) et en renumérotant, on obtient :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad f_\alpha(x) = \frac{\alpha}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \sin(n)\alpha.$$

Exercice 10.6 : Convergence et calcul de la somme

1. Étudier la convergence et la continuité de la somme de la série entière :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n-1)}.$$

2. Calculer la valeur de la somme $S(x)$.
3. Calculer $S(1)$ et $S(-1)$.

1. Le rayon de convergence est aisé à trouver par la règle de d'Alembert.

On a, pour $r > 0$

$$\frac{r^{n+1}}{(n+1)n} \times \frac{n(n-1)}{r^n} = \frac{r(n-1)}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} r$$

donc la série converge pour $r < 1$ et diverge pour $r > 1$ par le critère de d'Alembert. Ainsi la série entière admet $R = 1$ pour rayon de convergence.

La série entière converge et définit donc une fonction continue sur $]-1,1[$. Il reste à étudier la convergence aux bornes.
Ici, c'est simple, et on obtiendra même la convergence normale sur le segment $[-1,1]$.

Pour $n \geqslant 2$, on note u_n la fonction définie par $u_n(x) = \dfrac{x^n}{n(n-1)}$.

Pour $x = \pm 1$, on a $|u_n(x)| \sim \dfrac{1}{n^2}$ qui est le terme général d'une série de Riemann convergente. Le domaine de convergence de la série étudiée est $I = [-1,1]$, et

pour $x \in I$, on a
$$|u_n(x)| \leqslant \frac{1}{n(n-1)}$$
qui est le terme général d'une série convergente. La convergence est donc normale sur I, puis la somme S est continue sur I (puisque les fonctions u_n sont toutes continues sur I).

Ceci permet de calculer les valeurs aux bornes par passage à la limite de la somme sur l'ouvert : c'est précisément ce que proposent les questions suivantes.

2. Le développement en série entière connu le plus proche est :
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x).$$
On peut s'y ramener par une décomposition en éléments simples.

Pour $n \geqslant 2$, on a la décomposition :
$$\frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}.$$
On peut écrire $S(x)$ comme somme de deux séries entières qui sont définies sur $]-1, 1[$:
$$S(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n-1} - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n}.$$
On obtient donc, pour $x \in]-1, 1[$,
$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} + x = -x\ln(1-x) + \ln(1-x) + x \\ &= (1-x)\ln(1-x) + x. \end{aligned}$$

On aurait aussi pu remarquer que le facteur n du dénominateur se simplifiait par dérivation :
$$S'(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$$
et conclure en intégrant par parties.

3. Il faut ici utiliser la continuité de S sur $[-1, 1]$.

Le calcul précédent est faux en $x = 1$ ou $x = -1$, puisque les deux séries qui interviennent sont divergentes.

Comme S est continue en 1 et -1, on a

$$S(1) = \lim_{x \to 1^-} S(x) = 1$$

par croissance comparée et

$$S(-1) = \lim_{x \to -1^+} S(x) = 2\ln(2) - 1.$$

Exercice 10.7 : Avec une suite récurrente

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $a_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} a_k.$$

1. On suppose dans cette question que la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ a un rayon de convergence R strictement positif. Donner une formule vérifiée par sa somme S et calculer S au voisinage de 0.
2. En déduire la valeur de a_n pour tout $n \in \mathbb{N}$
3. Donner un équivalent de a_n.

1. La formule vérifiée par les a_n fait penser à un produit de Cauchy. Comme l'hypothèse faite assure que $\sum a_n x^n$ converge absolument pour $x \in]-R, R[$, on peut effectuer le produit de $S(x)$ par elle-même.

Soit $x \in]-R, R[\backslash\{0\}$. Par hypothèse, $\sum a_n x^n$ converge absolument, donc par produit de Cauchy, on a

$$\begin{aligned}
S(x)^2 &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}\right) x^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1} x^n = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n = \frac{1}{x}(S(x) - a_0) \\
&= \frac{1}{x}(S(x) - 1).
\end{aligned}$$

On en déduit que $xS(x)^2 - S(x) + 1 = 0$, relation qui est encore vérifiée si $x = 0$.

Pour trouver la valeur de $S(x)$, il n'y a donc qu'à résoudre cette équation du second degré. Le seul problème va être de trouver à laquelle des deux solutions $S(x)$ correspond.

$S(x)$ est solution d'une équation du second degré dont le discriminant vaut $1-4x$, et dont les solutions sont

$$\frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2}.$$

Pour $x \in]-R, R[$, on a donc

$$S(x) = \frac{1 + \varepsilon(x)\sqrt{1-4x}}{2x}.$$

avec $\varepsilon(x) \in \{-1, 1\}$. Notons que

$$\varepsilon(x) = \frac{2xS(x) - 1}{\sqrt{1-4x}}$$

définit une fonction continue sur $]-R', R'[$ avec $R' = \min\left(R, \frac{1}{4}\right)$ (comme quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas). Comme ε est à valeurs dans $\{-1, 1\}$, elle est constante (sinon elle prendrait toutes les valeurs de $[-1, 1]$ par le théorème des valeurs intermédiaires).
On calcule $\varepsilon(0) = -1$, donc ε est constante -1. Ainsi pour tout $x \in]-R', R'[$,

$$S(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x}.$$

2. Pour trouver la valeur des a_n, on va déterminer le développement en série entière de la la fonction S précédente. S'il a bien un rayon de convergence > 0, on pourra identifier ses coefficients avec les a_n.

Soit $x \in \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[$. Alors $|4x| < 1$ donc en utilisant le développent en série entière usuel de la racine carrée,

$$\begin{aligned}
\sqrt{1-4x} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\frac{1}{2}) \times (\frac{1}{2} - 1) \times \cdots \times (\frac{1}{2} - n + 1)}{n!}(-4x)^n \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1) \times (-1) \times \cdots \times (-2n+3)}{2^n n!}(-4x)^n \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-3)}{n!}(-2x)^n \\
&= 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (2n-1) \times (2n)}{(2n-1)(2 \times 4 \times \cdots \times (2n))n!}(x)^n \\
&= 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(2n-1)(2^n n!)n!}(2x)^n = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{2n}{n} \frac{x^n}{2n-1}
\end{aligned}$$

Par suite, en notant $f : x \mapsto \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$,

$$f(x) = \frac{1}{2x}\left(1 - 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\binom{2n}{n}\frac{x^n}{2n-1}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\binom{2n}{n}\frac{x^{n-1}}{2(2n-1)}$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty}\binom{2n+2}{n+2}\frac{x^n}{2(2n+1)}.$$

Notons alors $b_n = \frac{1}{2(2n+1)}\binom{2n+2}{n+2}$. $f(x)$ vérifie $xf(x)^2 - f(x) + 1 = 0$ donc on remontant les calculs fait au 1, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} b_k b_{n-k}$$

par unicité du développement en série entière de f. Comme $b_0 = 1$, on en déduit par récurrence forte que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = b_n$. Ainsi

$$a_n = \frac{1}{2(2n+1)}\binom{2n+2}{n+2}.$$

On ne peut pas immédiatement dire que $a_n = b_n$ puisqu'on ne sait pas à l'avance si S a bien un rayon de convergence strictement positif.

3. On utilise la formule de Stirling pour déterminer cet équivalent.

D'après la question précédente, pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2(2n+1)}\binom{2n+2}{n+2} \\ &= \frac{(2n+2)!}{2(2n+1)((n+1)!)^2} \\ &\sim \frac{\sqrt{2\pi(2n+2)}(2n+2)^{2n+2}(\mathrm{e}^{n+1})^2}{2(2n+1)\mathrm{e}^{2n+2}(\sqrt{2\pi(n+1)}(n+1)^{n+1})^2} \\ &\sim \frac{4^{n+1}}{2(2n+1)\sqrt{\pi(n+1)}} \sim \frac{4^n}{n\sqrt{\pi n}} \end{aligned}$$

Exercice 10.8 : Dénombrement

Étant donnés un entier naturel non nul n et un ensemble fini à n éléments E, on note a_n le nombre de bijections de E dans lui-même sans point fixe (c'est-à-dire $f\colon E \to E$, bijective, telle que $f(x) \neq x$ pour tout élément x de E). On pose par ailleurs $a_0 = 1$.

1. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n! = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_{n-k}$. On pourra, pour cela, dénombrer les bijections de E dans lui-même en fonction de leur nombre de points fixes.

2. On pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!}\, x^n$. Démontrer que cette série entière a un rayon de convergence non nul. Donner une expression simple (sans série) de la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x f(x)$.

3. En déduire la valeur de a_n à l'aide d'une somme et la limite de $\dfrac{a_n}{n!}$ quand n tend vers $+\infty$.

1. Nous utilisons ici un argument de double comptage : on détermine de deux façons différentes le nombre de bijections de E dans lui-même (*permutations* de E), chaque résultat donnant un membre de l'égalité.

Soit E un ensemble à n éléments et $k \in \{0, \ldots, n\}$.
Les bijections de E dans lui-même ayant exactement k points fixes s'obtiennent en choisissant k éléments de E qui seront envoyés sur eux-mêmes ($\binom{n}{k}$ choix possibles) et en choisissant une bijection de l'ensemble des autres éléments dans lui-même sans point fixe. Il y en a, par définition, a_{n-k}.
Dans le cas où $k = n$, il n'y a qu'une bijection de E dans lui-même avec n points fixes, à savoir l'identité, et la formule reste vraie car on a posé, par convention, $a_0 = 1$.
Comme il y a, au total, $n!$ bijections de E dans lui-même, il vient :

$$n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_{n-k}.$$

2. Pour démontrer qu'un rayon de convergence n'est pas nul, il suffit de trouver une valeur de $x \neq 0$ pour laquelle la série converge.

a_n est le cardinal d'un sous-ensemble de $\mathscr{S}(E)$ (l'ensemble des permutations de E) qui est de cardinal $n!$. On a donc $0 \leqslant a_n \leqslant n!$ et enfin $\left|\dfrac{a_n}{n!}\right| \leqslant 1$.
Par comparaison à une série géométrique, la série de terme général $\dfrac{a_n}{n!}\, x^n$ est donc convergente pour tous les réels $x \in \,]-1, 1[$, ce qui montre que le rayon

de convergence de la série entière définissant f est supérieur ou égal à 1 et en particulier non nul.

Le produit de deux séries entières peut ensuite être obtenu par produit de Cauchy.

Il ne faut pas oublier de vérifier l'hypothèse du produit de Cauchy : les deux séries doivent converger absolument. C'est bien le cas sur l'intervalle ouvert de convergence d'une série entière.

Pour $x \in]-1,1[$, la série de terme général $\dfrac{a_n}{n!}x^n$ et la série définissant e^x convergent absolument. On a donc, par produit de Cauchy,

$$\begin{aligned} e^x f(x) &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!}x^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\frac{a_{n-k}}{(n-k)!}\right)x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_{n-k}\right)x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \end{aligned}$$

3. On se ramène à un nouveau produit de Cauchy en multipliant par e^{-x}. La suite des calculs ne pose pas de problème supplémentaire.

Le produit de Cauchy de deux séries (qui convergent absolument pour tout $x \in]-1,1[$) permet d'écrire :

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!}x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$$

avec

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Il vient donc, par unicité du développement en série entière (le rayon de convergence étant strictement positif) :

$$a_n = n!b_n = n!\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

On en déduit que

$$\frac{a_n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

Exercice 10.9 : Convergence radiale

Soit $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une série entière. On suppose que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge et on note ℓ sa somme.

1. On pose $A_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$. Démontrer que la série entière $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (A_n - \ell)x^n$ a un rayon de convergence supérieur ou égal à 1 et que :

$$\forall x \in [0,1[, \quad f(x) - \ell = (1-x)\sum_{n=0}^{+\infty} (A_n - \ell)x^n.$$

2. En déduire que f est continue en 1.

3. Utiliser ce résultat pour calculer les valeurs de

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

1. Par définition de la somme d'une série, la suite de terme général A_n est convergente de limite ℓ car c'est la suite des sommes partielles de la série de terme général a_n. Autrement dit, dans cette première question, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} A_n = \ell$.

Pour montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (A_n - \ell)x^n$ est au moins 1 il suffit de démontrer que cette série converge absolument pour tout réel x tel que $|x| < 1$.

On a clairement convergence absolue pour $|x| < 1$, puisque $(A_n - \ell)x^n = o(x^n)$ et la série $\sum x^n$ est absolument convergente pour $x \in]-1,1[$. Ceci montre que le rayon de convergence de la série entière définissant f est au moins 1.

Ceci ne donne aucun renseignement sur le comportement pour $|x| = 1$. La question 2 n'est donc ni superflue, ni évidente.

Pour continuer, on fait le lien entre les suites de termes généraux a_n et A_n : cette manipulation est appelée *transformation d'Abel* (voir exercice **7.4**).

On remarque que $A_0 = a_0$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = A_n - A_{n-1}$. Pour $x \in [0,1[$ on a donc :

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (A_n - A_{n-1})x^n = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} A_{n-1}x^n,$$

les deux séries convergent car la suite (A_n) est bornée car convergente. Par suite

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} A_n x^{n+1} = (1-x)\sum_{n=0}^{+\infty} A_n x^n.$$

Par ailleurs, comme $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ pour $x \in [0,1[$, il vient :

$$\ell = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} \ell x^n.$$

On a donc bien, pour $x \in [0,1[$:

$$f(x) - \ell = (1-x)\sum_{n=0}^{+\infty} (A_n - \ell)x^n.$$

2. On va chercher à montrer la définition de la limite. Pour cela, on traduit la convergence de la suite de terme général A_n vers le réel ℓ.

Soit un réel $\varepsilon > 0$. Il existe un entier naturel N tel que, pour $n \geqslant N$, on a $|A_n - \ell| \leqslant \varepsilon$.

On doit donc séparer la somme en deux, pour pouvoir utiliser la majoration ci-dessus pour les indices supérieurs à N.

On ne peut rien dire sur les termes d'indices n compris entre 0 et $N-1$. Il faudra trouver un autre moyen de les majorer par ε.

On peut écrire, pour $x \in [0,1[$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (A_n - \ell)x^n = \sum_{n=0}^{N} (A_n - \ell)x^n + \sum_{n=N+1}^{+\infty} (A_n - \ell)x^n$$

et majorer la deuxième expression :

$$\left|\sum_{n=N+1}^{+\infty} (A_n - \ell)x^n\right| \leqslant \sum_{n=N+1}^{+\infty} |A_n - \ell|\, x^n \leqslant \sum_{n=N+1}^{+\infty} \varepsilon x^n \leqslant \varepsilon \frac{x^{N+1}}{1-x}$$

d'où l'on déduit :

$$|f(x) - \ell| \leqslant (1-x)\left|\sum_{n=0}^{N} (A_n - \ell)x^n\right| + \varepsilon.$$

La fonction $x \mapsto (1-x)\left|\sum\limits_{n=0}^{N} (A_n - \ell)x^n\right|$ est continue en 1. En effet, elle est le produit de $1-x$ et de la valeur absolue d'une fonction polynomiale. Ainsi la limite de ce terme en 1 est nulle. On en déduit qu'il existe un réel $\eta > 0$ tel que, pour $x \in [0,1[$ vérifiant $|1-x| \leqslant \eta$, on a :

$$(1-x)\left|\sum_{n=0}^{N}(A_n-\ell)x^n\right| \leqslant \varepsilon.$$

Ainsi, il existe un réel $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in [0,1[\,\cap\,[1-\eta, 1+\eta], \quad |f(x)-\ell| \leqslant 2\,\varepsilon.$$

Ceci montre que $f(x) \underset{x\to 1}{\longrightarrow} \ell = f(1)$, f est donc bien continue en 1.

3. On applique le théorème précédent à $a_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$ et $a_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

En posant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$, on reconnait $f(x) = \ln(1+x)$ pour $x \in [0,1[$. Comme $\sum a_n$ converge par le critère spécial sur les séries alternées, on en déduit que

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = f(1) = \ln(2)$$

par la question précédente.

De même en posant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$, on reconnait cette fois $f(x) = \arctan(x)$ pour $x \in [0,1[$. Comme $\sum a_n$ converge par le critère spécial sur les séries alternées, on en déduit que

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = f(1) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$

par la question précédente.

Exercice 10.10 : Détermination d'une somme

Soit $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\binom{2n}{n}\frac{1}{2n-1}x^n$.

1. Donner le rayon de convergence de $f(x)$.

2. Démontrer que f est solution de l'équation différentielle $(1+4x)y' - 2y = 0$.

3. En déduire f.

1. La règle de d'Alembert s'applique sans problème, puisque les coefficients sont tous non nuls, et sont par nature des produits.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $a_n = (-1)^n \binom{2n}{n} \dfrac{1}{2n-1}$. Si $r > 0$, on a

$$\frac{|a_{n+1}|\, r^{n+1}}{|a_n|\, r^n} = \frac{(2n+2)!}{[(n+1)!]^2} \times \frac{[n!]^2}{(2n)!} \times \frac{(2n-1)r^{n+1}}{(2n+1)r^n} = \frac{2(2n-1)r}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 4r$$

et la série $\sum a_n r^n$ converge si $r < \dfrac{1}{4}$, diverge si $r > \dfrac{1}{4}$ par le critère de d'Alembert. Par suite, le rayon de convergence de la série entière est égal à $\dfrac{1}{4}$.

2. Cette question ne présente pas de difficulté particulière, puisque les sommes de séries entières peuvent être dérivées terme à terme sur l'intervalle ouvert de convergence.

Pour $x \in \left]-\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4}\right[$ on peut calculer la dérivée :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \binom{2n}{n} \frac{n}{2n-1}\, x^{n-1} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} \binom{2n+2}{n+1} \times \frac{n+1}{2n+1}\, x^n \text{ avec } n \longleftarrow n-1 \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2} \times \frac{n+1}{2n+1}\, x^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} \times \binom{2n}{n} \times \frac{n+1}{2n+1}\, x^n \\
&= 2\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} \binom{2n}{n} x^n.
\end{aligned}$$

Pour se rapprocher de l'égalité de l'énoncé, calculons :

$$\begin{aligned}
4xf'(x) &= 8\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1}\, \frac{(2n)!}{[n!]^2}\, x^{n+1} \\
&= 8\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n\, \frac{(2n-2)!}{[(n-1)!]^2}\, x^n \text{ avec } n \longleftarrow n+1 \\
&= 8\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n\, \frac{(2n)!}{[n!]^2}\, x^n \times \frac{n \times n}{2n(2n-1)} \\
&= 4\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \binom{2n}{n} \frac{n}{2n-1} x^n
\end{aligned}$$

et on peut ajouter le terme d'indice $n = 0$ dans cette somme sans rien changer. On en déduit :

$$\begin{aligned}(1+4x)f'(x) &= 2\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}\binom{2n}{n}x^n + 4\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\binom{2n}{n}\frac{n}{2n-1}x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\binom{2n}{n}\frac{x^n}{2n-1}\times[-2(2n-1)+4n] \\ &= 2f(x).\end{aligned}$$

3. Il s'agit ici d'une résolution d'équation différentielle linéaire homogène du premier ordre : aucune difficulté, si ce n'est *a priori* pour le calcul de primitive, qui ne pose pas de problème ici. On utilise ensuite une valeur particulière de f pour déterminer la valeur de la constante.

Il ne faut pas oublier que la résolution d'une équation différentielle d'ordre 1 fait intervenir une constante réelle quelconque.

Pour $|x| < \dfrac{1}{4}$ la résolution de l'équation différentielle linéaire homogène du premier ordre à coefficients continus $f'(x) = \dfrac{2}{1+4x}f(x)$ conduit à :

$$f(x) = \lambda\exp\left(\int_0^x \frac{2}{1+4t}\,\mathrm{d}t\right) = \lambda\exp\left[\frac{1}{2}\ln(1+4x)\right] = \lambda\sqrt{1+4x},$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$. Avec $f(0) = -1$, on trouve $\lambda = -1$. Ainsi

$$\forall x \in \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[, \quad f(x) = -\sqrt{1+4x}.$$

Exercice 10.11 : Théorème de Liouville

Soit $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence infini.

1. Pour $r \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}$, montrer que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(r\,\mathrm{e}^{it})\,\mathrm{e}^{-int}\,\mathrm{d}t = a_n\,r^n.$$

2. En déduire que si f est bornée, f est constante.

1. On doit calculer l'intégrale d'une série de fonctions. On a donc très envie d'intervertir la série et l'intégrale. Pour ce faire, il faut avoir convergence uniforme. Ceci vient de la convergence absolue de la série entière en r.

> Il est inutile d'utiliser le théorème d'intégration terme à terme (dont les hypothèses sont bien plus lourdes) quand on intègre sur un segment.

Soient $r \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}$. Pour $p \in \mathbb{N}$, et $t \in [0, 2\pi]$, on a

$$|a_p (r\,\mathrm{e}^{it})^p \mathrm{e}^{-int}| = |a_p| r^p.$$

Comme $f(r)$ converge absolument (car f est de rayon de convergence infini), ceci est le terme général d'une série convergente. Ainsi, la série de fonctions

$$\sum_{p=0}^{+\infty} a_p\,(r\,\mathrm{e}^{it})^p\,\mathrm{e}^{-int}$$

converge normalement, donc uniformément, sur $[0, 2\pi]$. On peut donc intervertir série et intégrale :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(r\,\mathrm{e}^{it})\,\mathrm{e}^{-int}\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2\pi}\sum_{p=0}^{+\infty}\int_0^{2\pi} a_p\,r^p\,\mathrm{e}^{i(p-n)t}\,\mathrm{d}t \\
&= a_n r^n + \sum_{\substack{p=0\\ p\neq n}}^{+\infty} \frac{a_p\,r^p}{2\pi\,i(p-n)}\left[\mathrm{e}^{i(p-n)t}\right]_0^{2\pi} \\
&= a_n r^n
\end{aligned}$$

2. On commence par exploiter le fait que f est bornée pour majorer l'intégrale de la question précédente.

Comme f est bornée, on a $M > 0$ tel que

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad |f(z)| \leqslant M.$$

Pour $r \in \mathbb{R}^+$ et $n \in \mathbb{N}$, on a donc :

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(r\,\mathrm{e}^{it})\,\mathrm{e}^{-int}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(r\,\mathrm{e}^{it})|\,\mathrm{d}t \leqslant M.$$

Ainsi $|a_n\,r^n| \leqslant M$.

Or, comme f est de rayon de convergence infini, ceci vaut pour tous les $r \in \mathbb{R}_+$. En passant à la limite quand $r \to +\infty$, on va avoir un problème si $a_n \neq 0$.

Si $n \neq 0$, on a $|a_n\,r^n| \underset{r\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ si $a_n \neq 0$... exclu ! Ainsi $a_n = 0$. Ainsi, pour $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = a_0$, donc f est constante.

Exercice 10.12 : Un équivalent de la somme

Soit g la fonction définie par $g(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \ln(n)x^n$. Donner un équivalent de $g(x)$ au voisinage de 1. On pourra considérer $(1-x)g(x)$.

Pour donner un sens à la question posée, commencez par des informations sur l'ensemble de définition de g.

On cherche le rayon de convergence de la série entière qui définit g.

- Pour $|x| < 1$, on a $\lim_{n\to+\infty} [\ln(n)\ |x|^n] = 0$ (par croissance comparée). La série entière a donc un rayon de convergence $R \geqslant 1$. Et en fait $R = 1$ puisque pour $x = \pm 1$ le terme général ne tend pas vers 0. La fonction g est définie sur $]-1, 1[$.
- Utilisons maintenant l'indication de l'énoncé.

$$\begin{aligned}(1-x)g(x) &= \sum_{n=2}^{+\infty} \ln(n)\ x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} \ln(n)\ x^{n+1} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(n+1)\ x^{n+1} - \sum_{n=2}^{+\infty} \ln(n)\ x^{n+1} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\ x^{n+1}.\end{aligned}$$

On sait que $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ on a donc très envie décrire que

$$(1-x)\,g(x) \underset{x\to1^-}{\sim} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\, x^{n+1} = -\ln(1-x).$$

On ne peut bien entendu pas écrire la formule ci-dessus sans justification plus rigoureuse. Mais elle peut servir à intuiter le résultat.

Pour montrer proprement cette formule, on considère la fonction $(1-x)g(x)+\ln(1-x)$, et on va montrer qu'elle est négligeable devant $-\ln(1-x)$ au voisinage de 1.

Considérons la fonction h définie sur $]-1, 1[$ par :

$$h(x) = (1-x)g(x) + \ln(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}\right] x^{n+1}.$$

Comme
$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n}\underset{n\to+\infty}{\sim}-\frac{1}{2n^2}$$
la série entière qui définit $h(x)$ converge normalement sur $[-1,1]$.
En effet, à partir d'un certain rang, $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)-\dfrac{1}{n}$ a même signe strict que son équivalent $-\dfrac{1}{2n^2}$, donc est <0. Au-delà de ce rang, on a pour $x\in[-1,1]$:
$$\left|\left[\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n}\right]x^{n+1}\right|\leqslant\left|\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n}\right|$$
qui est le terme général d'une série convergente (par le théorème de comparaison).
La convergence étant normale sur $[-1,1]$, la somme de la série entière est continue sur cet intervalle. h se prolonge donc en une fonction continue sur $[-1,1]$, d'où :
$$\lim_{x\to1^-}\left[(1-x)g(x)+\ln(1-x)\right]=h(1).$$
Comme $-\ln(1-x)$ tend vers l'infini ; on a donc :
$$h(x)=\underset{x\to1}{o}(-\ln(1-x))\text{ et }(1-x)g(x)\underset{x\to1^-}{\sim}-\ln(1-x)$$
ou encore :
$$g(x)\underset{x\to1^-}{\sim}-\frac{\ln(1-x)}{1-x}.$$

On a de plus :
$$h(1)=\lim_{n\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}\left[\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n}\right]=\lim_{n\to+\infty}\left[\ln(N+1)-\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}\right]$$
$$=-\gamma\text{ (constante d'Euler).}$$
On a donc montré (au voisinage de 1^-) que :
$$g(x)=-\frac{\ln(1-x)}{1-x}-\frac{\gamma}{1-x}+o\left(\frac{1}{1-x}\right).$$

Exercice 10.13 : Calcul de la somme d'une série numérique

Soit $f(x) = \dfrac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$.
1. Justifier que f possède un développement en série entière. Quel est son rayon de convergence ?
2. Démontrer que f vérifie une équation différentielle linéaire d'ordre 1, puis calculer le développement en série entière de f.
3. En déduire la valeur de :

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\binom{2n}{n}}.$$

1. Il n'est pas nécessaire ici de calculer les coefficients du produit de Cauchy (c'est d'ailleurs l'objet de la question suivante) : il suffit de savoir qu'un produit de Cauchy de séries absolument convergentes l'est également, ce qui donne une minoration du rayon de convergence.

La fonction f est le produit de deux fonctions possédant un développement en série entière de rayon 1. Elle possède donc un développement en série entière de rayon $\geqslant 1$ (puisque pour $r < 1$, les séries définissant $\arcsin(r)$ et $(1-r^2)^{-1/2}$ convergent absolument).
Ce rayon est égal à 1 car f n'est pas définie en 1.

2. On commence par dériver f pour établir l'équation différentielle.

On a, pour $x \in]-1,1[$:

$$f'(x) = \frac{1}{1-x^2} + \arcsin(x) \times \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}.$$

On en déduit que f vérifie l'équation différentielle :

$$(1-x^2)f'(x) = 1 + xf(x).$$

On peut ensuite simplement injecter le développement en série entière de f dans cette relation. On simplifie les calculs en remarquant préalablement une propriété de parité.

Le développement en série entière de f est de la forme :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Pour $x \in]-1,1[$, on peut dériver terme à terme et reporter dans l'équation différentielle :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} = 1$$

soit en changeant les indices si nécessaire pour avoir x^n partout :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\,a_{n+1}\,x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} n\,a_{n-1}\,x^n = 1.$$

L'unicité du développement en série entière entraîne :

$$a_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_{n+1} = \frac{n}{n+1}\,a_{n-1}.$$

L'équation de récurrence lie a_{n+2} à a_n.

En tirant l'équation de récurrence, on obtient a_n en fonction de a_{n-2k}, avec $0 \leqslant 2k \leqslant n$. Au final, on peut donc arriver à a_0 ou à a_1.

Ainsi, on obtient a_n en fonction de a_0 si n est pair, et de a_1 si n est impair. On calcule donc séparément a_{2n} et a_{2n+1}.
En substituant de proche en proche, on calcule :

$$\begin{aligned}
a_{2n+1} &= \frac{2n}{2n+1}\,a_{2n-1} = \frac{2n}{2n+1} \times \frac{2n-2}{2n-1}\,a_{2n-3} \\
&= \frac{2n}{2n+1} \times \frac{2(n-1)}{2n-1} \times \cdots \times \frac{2}{3}\,a_1 \\
&= \frac{[(2n)^2 \times (2n-2)^2 \times \cdots \times 2^2]}{(2n+1)!} \\
&= \frac{[2^n n!]^2}{(2n+1)!} = \frac{2^{2n}}{(2n+1)\binom{2n}{n}}
\end{aligned}$$

De même, on trouve

$$a_{2n} = \frac{(2n-1) \times \cdots \times 1}{(2n) \times \cdots \times 2}a_0$$

mais comme $a_0 = f(0) = 0$, $a_{2n} = 0$.
Ainsi on obtient :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{2n}}{(2n+1)\binom{2n}{n}}\,x^{2n+1}.$$

3. Pour faire apparaître S, il faut éliminer le facteur $2n+1$ du dénominateur, ce qui peut être réalisé en dérivant. Le facteur 2^{2n} peut ensuite être compensé par x^{2n} en prenant la valeur en $\frac{1}{2}$.

Pour $x \in \,]-1,1[$, on peut dériver terme à terme :

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{2n}}{\binom{2n}{n}}x^{2n}$$

donc
$$S = f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{3} + \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}.$$

Exercice 10.14 : Limite du quotient de deux sommes

Soit $\sum a_n\, x^n$ et $\sum b_n\, x^n$ deux séries entières de rayon de convergence infini. On suppose que $a_n \geqslant 0$ et $b_n > 0$ pour tout n, et que $\dfrac{a_n}{b_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} L$. On note
$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n \quad \text{et} \quad g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n\, x^n.$$
Démontrer que $\dfrac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} L$.

Il y a la limite d'une suite dans l'hypothèse et la limite d'une fonction dans la conclusion. Pour passer de l'une à l'autre, on revient à la définition avec les ε.

Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de la limite, l'hypothèse nous donne l'existence de :
$$n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geqslant n_0, \quad \left|\frac{a_n}{b_n} - L\right| \leqslant \varepsilon.$$

On ne pourra en revanche utiliser cette inégalité qu'à partir du rang n_0, il faut donc scinder la somme en deux parties.

Avec la majoration $|a_n - Lb_n| \leqslant \varepsilon\, b_n$ utilisable à partir de n_0, on a donc :
$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n - L \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{n_0-1} |a_n - Lb_n|\, x^n + \sum_{n=n_0}^{+\infty} \varepsilon\, b_n x^n.$$
On en déduit pour $x \geqslant 1$:
$$\begin{aligned}\left|\frac{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n}{\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\, x^n} - L\right| &\leqslant \frac{\left(\sum_{n=0}^{n_0-1} \left|a_n - Lb_n\right|\right) x^{n_0-1}}{\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\, x^n} + \varepsilon \frac{\sum_{n=n_0}^{+\infty} b_n\, x^n}{\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\, x^n} \\ &\leqslant \frac{Ax^{n_0-1}}{b_{n_0} x^{n_0}} + \varepsilon \text{ en posant } A = \sum_{n=0}^{n_0-1} |a_n - Lb_n| \\ &\leqslant \frac{A}{b_{n_0} x} + \varepsilon.\end{aligned}$$

Comme $\dfrac{A}{b_{n_0}x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on a $B \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x > B$, $\dfrac{A}{b_{n_0}x} \leqslant \varepsilon$.
Ainsi, pour $x > B$, on a finalement

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - L\right| \leqslant 2\varepsilon$$

et on a montré que $\dfrac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} L$.

CHAPITRE

Intégration

11

Exercice 11.1 : Un calcul d'intégrale I

Soient a et b deux réels strictement positifs.
1. Démontrer l'existence de l'intégrale

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-ax} - \mathrm{e}^{-bx}}{x} \,\mathrm{d}x.$$

2. Démontrer que, pour tout réel $h > 0$:

$$\int_h^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-ax} - \mathrm{e}^{-bx}}{x} \,\mathrm{d}x = \int_{ah}^{bh} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t} \,\mathrm{d}t.$$

3. Démontrer que la fonction $g\colon t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t} - 1}{t}$ peut être prolongée par continuité en 0. En déduire la valeur de I.

1. Notons

$$f : x \mapsto \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x},$$

continue sur $]0, +\infty[$. Pour montrer que I existe, nous allons étudier séparément l'existence de l'intégrale sur $]0, 1]$ et de l'intégrale sur $[1, +\infty[$.
Classiquement, ceci se fait par une recherche de limites, d'équivalents (notamment via des développements limités) et de comparaison à des fonctions usuelles.

> Un développement limité à l'ordre 1 en 0 donne $\mathrm{e}^{-ax} = 1 - ax + \underset{x \to 0}{o}(x)$ et $\mathrm{e}^{-bx} = 1 - bx + \underset{x \to 0}{o}(x)$, d'où
>
> $$f(x) = \frac{\mathrm{e}^{-ax} - \mathrm{e}^{-bx}}{x} = (b - a) + \underset{x \to 0}{o}(1).$$
>
> Ainsi f est continue sur $]0, 1]$ et se prolonge par continuité en 0 donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(x) \,\mathrm{d}x$ existe.

Pour l'étude au voisinage de $+\infty$, nous allons utiliser le critère de Riemann.

On a $x^2 f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissance comparée, donc

$$\frac{\mathrm{e}^{-ax} - \mathrm{e}^{-bx}}{x} = \underset{x\to+\infty}{o}(x^{-2}).$$

Ainsi $f(x) = \underset{x\to+\infty}{o}(x^{-2})$. Comme la fonction $x \mapsto x^{-2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, il en est de même de la fonction f.
En conclusion, I existe.

2. Partant de I, si l'on veut obtenir des intégrales ne faisant intervenir qu'une seule exponentielle comme dans le résultat demandé, un problème de taille se pose. En effet, l'égalité

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-ax}}{x}\,\mathrm{d}x - \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}x$$

n'a aucun sens ! Les deux intégrales de droite sont divergentes car la fonction intégrée est équivalente à $\frac{1}{x} > 0$ en 0 et $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x}$ diverge.
C'est pour cela que l'énoncé propose d'intégrer non plus à partir de 0 mais à partir d'un certain réel $h > 0$: plus aucun problème ne se pose alors car les deux fonctions sont bien intégrables sur $[h, +\infty[$ d'après l'étude effectuée à la première question.

D'une manière générale, dans le cadre des intégrales généralisées, il ne faut jamais écrire une égalité de la forme

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

sans s'être assuré que les intégrales du second membre existent : il peut arriver qu'une telle égalité n'ait pas de sens !

Soit $h \in \mathbb{R}_+^*$. Les fonctions $x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-ax}}{x}$ et $x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-bx}}{x}$ sont intégrables sur $[h, +\infty[$ d'après l'étude menée dans la première question. Ainsi :

$$\int_h^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-ax} - \mathrm{e}^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}x = \int_h^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-ax}}{x}\,\mathrm{d}x - \int_h^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Il reste à changer ax et bx en t dans chacune des intégrales, ce qui est clairement une application de la formule de changement de variable.

En effectuant le changement de variable affine $u = ax$ (qui donne $\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}u}{a}$) il vient :

$$\int_h^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-ax}}{x}\,\mathrm{d}x = \int_{ah}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\frac{u}{a}} \times \frac{\mathrm{d}u}{a} = \int_{ah}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u.$$

De même :

$$\int_h^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}x = \int_{bh}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u$$

d'où, d'après la relation de Chasles :

$$\int_h^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-ax} - \mathrm{e}^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}x = \int_{ah}^{bh} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Selon le programme officiel, il n'est pas nécessaire de vérifier les hypothèses du changement de variable dans des intégrales impropres dans les cas suivants : fonctions affine, puissance, exponentielle et logarithme.

3. Il suffit de montrer que g possède une limite finie en 0. La formule étant une forme indéterminée quant t tend vers 0, on peut utiliser des développements limités (à l'ordre 1, puisque le dénominateur abaissera la puissance de 1).

Un développement limité à l'ordre 1 en 0 donne $\mathrm{e}^{-t} = 1 - t + \underset{t \to 0}{o}(t)$ d'où l'on tire $g(t) \underset{t \to 0}{\longrightarrow} -1$. La fonction g est donc prolongeable par continuité en 0.
Nous noterons encore g le prolongement de g obtenu en posant $g(0) = -1$, qui est donc continu sur $\mathbb{R}$.

En utilisant les séries entières, on aurait même pu montrer que g est de classe $\mathscr{C}^\infty$.

Il reste à faire le lien avec le calcul précédent en faisant apparaître $g(t)$ dans l'intégrale. A cet effet, nous pouvons également introduire une primitive G de g.

Soit G la primitive de g nulle en 0, ce qui a bien un sens puisque g est continue sur $\mathbb{R}$.
Faisons apparaître la fonction G :

$$\int_{ah}^{bh} \frac{\mathrm{e}^{-t} - 1}{t}\,\mathrm{d}t = G(bh) - G(ah).$$

Par ailleurs,

$$\int_{ah}^{bh} \frac{\mathrm{e}^{-t} - 1}{t}\,\mathrm{d}t = \int_{ah}^{bh} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t - \ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

Ainsi :

$$\int_h^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-ax} - \mathrm{e}^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}x = G(bh) - G(ah) + \ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

La fonction G est continue sur $\mathbb{R}$ puisque c'est une primitive de g qui est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$. En particulier, le passage à la limite $h \to 0$ ne pose pas de problème et permet de conclure.

En tant que primitive d'une fonction continue, la fonction G est continue, donc

$$G(ah) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} G(0) = 0 \quad \text{et} \quad G(bh) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} G(0) = 0,$$

d'où, en faisant tendre h vers 0 :

$$I = \ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

Exercice 11.2 : Un calcul d'intégrale II

Soit $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(x))\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer que I est bien définie et égale à $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\cos(x))\,\mathrm{d}x$.

2. En déduire une expression de I en fonction de $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(2x))\,\mathrm{d}x$, puis la valeur de I.

3. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{x}{\tan(x)}\,\mathrm{d}x$. On pourra effectuer le changement de variable $u = \dfrac{\pi}{2} - x$.

1. La fonction à intégrer est définie et continue sur $]0, \frac{\pi}{2}]$. Le seul problème concerne l'intégrabilité au voisinage de 0.

La fonction $x \mapsto \ln(\sin(x))$ est définie et continue sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Au voisinage de 0, nous avons $\ln(\sin(x)) \underset{x\to 0}{\sim} \ln(x)$. En effet,

$$\frac{\ln(\sin(x))}{\ln(x)} = 1 + \frac{\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)}{\ln(x)} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1.$$

Ainsi $\ln(\sin(x)) = \underset{x\to 0}{o}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$. Puisque la fonction $x \mapsto x^{-1/2}$ est intégrable au voisinage de 0, la fonction $x \mapsto \ln(\sin(x))$ l'est aussi. Ainsi, I est bien définie.

L'énoncé nous demande de comparer une intégrale contenant un sinus à une intégrale contenant un cosinus. On sait que l'on peut passer de l'un à l'autre par une formule de trigonométrie utilisant un changement de variable du type $y = \frac{\pi}{2} - x$. Nous allons donc faire ce changement de variable dans l'intégrale.

Effectuons le changement de variable affine $y = \dfrac{\pi}{2} - x$. Nous obtenons

$$I = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(x))\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \ln\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right)\right)\,\mathrm{d}y = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos(y))\,\mathrm{d}y.$$

Lorsque l'on étudie des intégrales faisant intervenir des fonctions trigonométriques, il est souvent intéressant d'effectuer des changements de variable comme $y = -x$, $\pi + x$, $\frac{\pi}{2} - x$, ... En effet, à l'aide des formules trigonométriques, on trouve alors une nouvelle expression de l'intégrale à calculer et, en la comparant avec l'expression de départ, on peut parfois en tirer des informations. La suite de l'exercice présente un exemple de cette stratégie.

2. L'énoncé nous demande de calculer une nouvelle intégrale faisant intervenir $\sin(2x)$. En utilisant la formule trigonométrique $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$, nous allons faire apparaître l'intégrale I.

Nous avons

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(2x))\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\pi/2} \ln(2\sin(x)\cos(x))\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\pi/2} \ln(2)\,\mathrm{d}x + \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(x))\,\mathrm{d}x + \int_0^{\pi/2} \ln(\cos(x))\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{\pi}{2}\ln(2) + 2I
\end{aligned}$$

d'après la question qui précède. On en déduit que

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(2x))\,\mathrm{d}x - \frac{\pi}{4}\ln(2).$$

Une autre possibilité pour faire intervenir I (ou une intégrale proche) en partant de l'intégrale de l'énoncé consiste à effectuer le changement de variable $y = 2x$.

En effectuant le changement de variable affine $y = 2x$, nous obtenons

$$\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(2x))\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln(\sin(y))\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}I + \frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{\pi} \ln(\sin(y))\,\mathrm{d}y$$

par la formule de Chasles.

Il nous reste maintenant à comparer l'intégrale $\int_{\pi/2}^{\pi} \ln(\sin(y))\,\mathrm{d}y$ à I. Cela peut se faire à l'aide du changement de variable $z = \pi - y$.

En effectuant le changement de variable affine $z = \pi - y$ dans la dernière intégrale, nous obtenons

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \ln(\sin(y))\ \mathrm{d}y = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(z))\,\mathrm{d}z = I.$$

Maintenant, nous n'avons plus qu'à regrouper les résultats.

On en déduit que

$$\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(2x))\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}I + \frac{1}{2}I = I.$$

En injectant cette égalité dans la première que nous avons trouvée, on obtient

$$I = \frac{1}{2}I - \frac{\pi}{4}\ln(2)$$

et donc

$$I = -\frac{\pi}{2}\ln(2).$$

3. Commençons par nous assurer que l'intégrale est bien définie.

La fonction $x \mapsto \dfrac{x}{\tan(x)}$ est définie et continue sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$. En outre, au voisinage de 0, nous avons

$$\frac{x}{\tan(x)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x}{x} = 1,$$

donc la fonction est intégrable au voisinage de 0.
Au voisinage de $\dfrac{\pi}{2}$, nous avons $\dfrac{x}{\tan(x)} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, donc la fonction est également intégrable au voisinage de $\dfrac{\pi}{2}$.
Par conséquent, l'intégrale est bien définie.

L'énoncé nous propose de modifier l'intégrale à l'aide d'un changement de variable.

En effectuant le changement de variable affine $u = \dfrac{\pi}{2} - x$, nous obtenons

$$\int_0^{\pi/2} \frac{x}{\tan(x)}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \frac{\frac{\pi}{2} - u}{\tan\left(\frac{\pi}{2} - u\right)}\,\mathrm{d}u = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\pi}{2} - u\right)\tan(u)\,\mathrm{d}u.$$

Comment calculer cette dernière intégrale ? Nous savons intégrer la fonction tan puisque nous en connaissons une primitive : la fonction $u \mapsto -\ln(\cos(u))$. Il nous reste donc à éliminer le facteur $\frac{\pi}{2} - u$, ce que nous ferons en intégrant par parties.

Lors d'une intégration par parties pour les intégrales impropres, il faut bien vérifier que deux des trois termes existent.

Les fonctions $f : x \mapsto \frac{\pi}{2} - x$ et $g : x \mapsto -\ln(\cos(x))$ sont $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$. En posant $u = \frac{\pi}{2} - x$ nous avons

$$f(x)g(x) = -\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\ln(\cos(x)) = -u\ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right)\right) = -u\ln(\sin(u)).$$

Ce terme est équivalent à $-u\ln(u)$ (comme prouvé dans la première question) et tend donc vers 0 lorsque u tend vers 0. Ainsi $f(x)g(x) \underset{x\to\frac{\pi}{2}}{\longrightarrow} 0$ et par intégration par parties, nous obtenons

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \frac{x}{\tan(x)}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\pi}{2} - u\right)\tan(u)\,\mathrm{d}u \\ &= \left[-\left(\frac{\pi}{2} - u\right)\ln(\cos(u))\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \ln(\cos(u))\,\mathrm{d}u \\ &= -\int_0^{\pi/2} \ln(\cos(u))\,\mathrm{d}u = \frac{\pi}{2}\ln(2).\end{aligned}$$

Exercice 11.3 : Changement de variable

Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{x^2 + t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Calculer $f(1)$ (on pourra utiliser le changement de variable $u = \frac{1}{t}$).

2. En déduire la valeur de $f(x)$ pour tout $x > 0$.

1. Le changement de variable en lui-même ne présente aucune difficulté ; il suffit d'appliquer correctement la formule. Il donne $\mathrm{d}t = -\frac{1}{u^2}\,\mathrm{d}u$ et, quand t varie de 0 à $+\infty$, u varie de $+\infty$ à 0 (c'est-à-dire les bornes de l'intégrale sont renversées).

Il ne faut pas oublier qu'un changement de variable change trois choses : la variable, les bornes et l'élément différentiel.

Avant de faire quelque calcul que ce soit, justifions que l'intégrale existe bien. Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, nous avons, par croissance comparée :

$$\frac{\ln(t)}{x^2 + t^2} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{\ln t}{t^2} = \underset{t\to+\infty}{o}(t^{-3/2})$$

et cette dernière fonction est intégrable sur $[1, +\infty[$ par le critère de Riemann. En 0, $\frac{\ln(t)}{x^2 + t^2} \underset{t\to+0}{\sim} x^{-2}\ln t$, intégrable sur $]0, 1]$.

Ainsi, la fonction considérée est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et l'intégrale existe.
En effectuant le changement de variable $u = \dfrac{1}{t}$ (qui est une fonction puissance) il vient successivement :

$$\begin{aligned} f(1) &= \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_{+\infty}^0 \frac{\ln(\frac{1}{u})}{1+(\frac{1}{u})^2}\left(-\frac{1}{u^2}\right)\mathrm{d}u \\ &= \int_{+\infty}^0 \frac{\ln(u)}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = -f(1) \end{aligned}$$

donc $f(1) = 0$.

2. Pour déduire la valeur de $f(x)$ de celle de $f(1)$, nous pouvons envisager un changement de variable. Pour remplacer x par 1 dans x^2+t^2 il suffit de poser $t = ux$: alors $x^2+t^2 = x^2+(ux)^2 = x^2(1+u^2)$.

En effectuant le changement de variable affine $t = ux$ il vient successivement :

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{x^2+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(ux)}{x^2+(ux)^2}\,x\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \frac{\ln(u)+\ln(x)}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{x}\left(f(1)+\ln(x)\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u\right) \\ &= \frac{\ln(x)}{x}\Big[\arctan(u)\Big]_0^{+\infty} = \frac{\ln(x)}{x}\left(\lim_{u\to+\infty}\arctan(u) - \arctan(0)\right) \\ &= \frac{\pi\ln(x)}{2\,x}. \end{aligned}$$

Exercice 11.4 : Convergence de l'intégrale de Dirichlet

1. Démontrer que $\displaystyle\int_0^A \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ possède une limite finie quand A tend vers $+\infty$. On ne cherchera pas à la calculer explicitement, la détermination de sa valeur faisant l'objet des exercices **11.9** et **11.10**.
2. Démontrer que la fonction $t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t}$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour cela, on pourra remarquer que $|\sin(t)| \geqslant \dfrac{1-\cos(2t)}{2}$.
3. Démontrer que la fonction $t \mapsto \dfrac{\sin^2(t)}{t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. Montrer, sans calculer explicitement les intégrales, que :

$$\lim_{A\to+\infty}\int_0^A \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}\frac{\sin^2(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Cette limite est généralement désignée sous le nom d'*intégrale de Dirichlet*.

1. Notons tout d'abord que, étant donné un réel $A > 0$, la fonction $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ est bien intégrable sur $]0, A]$; en effet, elle y est continue et admet une limite en 0 (qui est 1). L'intégrale apparaissant dans cette question a bien un sens.
On sait que la limite demandée existe si $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$. Cependant ce n'est pas le cas, ainsi que l'affirme le résultat annoncé à la deuxième question ! Toutefois, ceci n'empêche pas cette limite d'exister.
Étant donné que nous ne pourrons pas majorer $\left|\frac{\sin(t)}{t}\right|$ par une fonction intégrable sur $]0, +\infty[$ nous allons employer un procédé classique pour « renforcer la convergence » : intégrer par parties. Plus précisément, nous essaierons ainsi, grâce au facteur $\frac{1}{t}$ de l'intégrale initiale, de faire apparaître une autre intégrale avec un facteur $\frac{1}{t^2}$ qui permettra d'assurer la convergence.
Cependant, un problème se pose. Si nous écrivons brutalement

$$\int_0^A \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{-\cos(t)}{t}\right]_0^A - \int_0^A \frac{\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

l'expression de droite n'a aucun sens : le crochet n'est pas défini pour $t = 0$ et l'intégrale n'existe pas non plus car $t^{-2}\cos(t) \underset{t\to 0}{\sim} t^{-2}$ et t^{-2} n'est pas intégrable au voisinage de 0 d'après le critère de Riemann.
Nous pouvons résoudre ce problème de manière simple : plutôt que de choisir $-\cos$ comme primitive de sin, on choisit $1 - \cos$, qui s'annule en 0.

> Lors d'une intégration par parties, attention à ne pas ajouter de problèmes là où il n'y en avait pas. On peut choisir n'importe quelle primitive de la fonction intégrée, mieux vaut donc prendre celle qui s'annule en l'une des bornes du crochet.

Soit $A > 0$. Les fonctions $u = 1 - \cos$ et $v : t \mapsto \dfrac{1}{t}$ étant $\mathscr{C}^1$ sur $]0, A]$, et vérifient

$$u(t)v(t) = \frac{1-\cos t}{t} = \frac{t^2}{2t} + \underset{t\to 0}{o}(t) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{t}{2} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Par intégration par parties, on a donc

$$\int_0^A \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1-\cos(t)}{t}\right]_0^A + \int_0^A \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t,$$

la première intégrale existant puisqu'il y a un faux problème en 0.
D'autre part, pour tout réel $t \geqslant 1$, on a

$$\left|\frac{1-\cos(t)}{t^2}\right| \leqslant \frac{2}{t^2}.$$

Or la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, donc $t \mapsto \dfrac{1-\cos(t)}{t^2}$ aussi.
Ainsi, l'expression $\displaystyle\int_0^A \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ admet une limite quand A tend vers $+\infty$ (à savoir vers $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$).
En conclusion :

$$\int_0^A \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{1-\cos A}{A} + \int_0^A \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

possède une limite finie quand A tend vers $+\infty$.

2. Nous avons déjà signalé ci-dessus qu'il n'y a pas de problème d'intégrabilité en 0. Nous allons donc étudier le problème en $+\infty$ en ne considérant toujours, pour des raisons pratiques de calcul, que des intégrales de 1 à A.
La trigonométrie permet de faire le lien entre $\sin(t)$ et $\cos(2t)$: $\cos(2t) = 1 - 2\sin^2(t)$.
Nous sommes donc amenés à comparer $|\sin(t)|$ et $\sin^2(t)$.

Pour tout réel $a \in [0, 1]$, $a^2 \leqslant |a|$. Ainsi :

$$|\sin(t)| \geqslant \sin^2(t) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2t)).$$

En divisant par $|t| > 0$ et intégrant de 1 à A on obtiendra une minoration de $\displaystyle\int_1^A \left|\frac{\sin(t)}{t}\right| \mathrm{d}t$, le but étant de montrer que cette expression tend vers $+\infty$ quand A tend vers $+\infty$.

On déduit de l'inégalité précédente, pour tout réel $A \geqslant 1$:

$$\int_1^A \left|\frac{\sin(t)}{t}\right| \mathrm{d}t \geqslant \int_1^A \frac{1}{2t}(1-\cos(2t))\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{1}{2}\ln(A) - \int_1^A \frac{\cos(2t)}{2t}\,\mathrm{d}t.$$

Le premier terme du minorant tend vers $+\infty$ quand A tend vers $+\infty$: c'est un bon début.
Il reste à étudier le comportement de l'intégrale. On reconnaît une expression analogue à celle de la première question ; nous allons utiliser la même technique de calcul, l'intégration par parties, pour voir qu'elle est aussi convergente.

Les fonctions $u : t \mapsto \dfrac{\sin(2t)}{2}$ et $v : t \mapsto \dfrac{1}{2t}$ sont $\mathscr{C}^1$ sur $[1, A]$, donc par intégration par parties

$$\int_1^A \frac{\cos(2t)}{2t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\sin(2t)}{4t}\right]_1^A + \int_1^A \frac{\sin(2t)}{4t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Ici encore le crochet converge quand A tend vers $+\infty$ et l'intégrale aussi car la fonction intégrée est dominée par t^{-2} et donc intégrable sur $[1, +\infty[$.
Ainsi,

$$\frac{1}{2}\ln(A) - \int_1^A \frac{\cos(2t)}{2t}\,\mathrm{d}t \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

et, comme elle minore $\displaystyle\int_1^A \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$, on en déduit que :

$$\lim_{A\to+\infty}\int_1^A \left|\frac{\sin(t)}{t}\right|\,\mathrm{d}t = +\infty.$$

Ainsi, la fonction $t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t}$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ puisque, dans le cas contraire, l'intégrale précédente serait convergente.

3. Il n'y a ici aucun problème grâce au dénominateur t^2 qui va assurer l'intégrabilité au voisinage de $+\infty$.

Pour $t \in \mathbb{R}_+^*$ notons

$$g(t) = \frac{\sin^2(t)}{t^2}.$$

g est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. D'après les limites usuelles, $g(t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 1$. La fonction g est donc intégrable au voisinage de 0.
Pour tout réel $t > 0$ on a $0 \leqslant g(t) \leqslant t^{-2}$ car $|\sin t| \leqslant 1$. Ceci montre que la fonction g est intégrable au voisinage de $+\infty$, d'après le critère de comparaison avec les intégrales de Riemann.
En conclusion, la fonction g est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

La domination par une fonction puissance intégrable, comme dans cette question, est un moyen rapide et simple de montrer qu'une fonction est intégrable. Elle est à utiliser dès que possible ! Remarquons qu'il existe un théorème analogue dans le cadre des séries numériques (comparaison avec les séries de Riemann).

4. En reprenant l'expression obtenue lors de la première question, on obtient un lien entre la limite cherchée et l'intégrale de $\frac{1-\cos t}{t^2}$. Il reste à utiliser la formule de trigonométrie $1 - \cos t = 2\,\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)$ pour conclure.

On a vu dans la première question que

$$\lim_{A\to+\infty}\int_0^A \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}\frac{1-\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}\frac{2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Il faut désormais $\sin(t)$ plutôt que $\sin\left(\frac{t}{2}\right)$ dans l'intégrale du second membre : le changement de variable $x = \frac{t}{2}$ est tout indiqué.

En effectuant le changement de variable affine $x = \dfrac{t}{2}$ il vient

$$\int_0^{+\infty}\frac{2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}{t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}\frac{2\sin^2(x)}{(2x)^2}2\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\frac{\sin^2(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Ainsi :
$$\lim_{A\to+\infty}\int_0^A \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 11.5 : Développement asymptotique de arcsin

1. Donner un équivalent en 1 de $\dfrac{\pi}{2} - \arcsin x$.
2. Donner un développement asymptotique à quatre termes de $\arcsin x$ en 1.

1. Comme $\frac{\pi}{2} = \arcsin 1$, on peut réécrire la différence sous la forme d'une intégrale. Il faut alors trouver un équivalent de l'intégrale en question, on va donc utiliser les théorèmes d'intégration des relations de comparaison.

Pour $x \in [-1, 1]$, on a
$$\frac{\pi}{2} - \arcsin x = \int_x^1 \arcsin'(t)\,\mathrm{d}t = \int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}.$$
Or
$$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1-t)(1+t)}} \underset{t\to1}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1-t}}.$$

Il faut toujours choisir un équivalent qui soit le plus simple possible, surtout ici, lorsqu'on doit l'intégrer.

Comme $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{2}\sqrt{1-t}}$ est convergente (par le critère de Riemann, et comme l'intégrande est positive, on peut intégrer cette relation de comparaison et :
$$\frac{\pi}{2} - \arcsin x = \int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} \underset{x\to1}{\sim} \int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{2}\sqrt{1-t}}$$
$$\underset{x\to1}{\sim} \left[-\frac{2}{\sqrt{2}}\sqrt{1-t}\right]_x^1 = \sqrt{2}\sqrt{1-x}.$$

2. Pour avoir un développement asymptotique à quatre termes de arcsin en 1, il faut un développement asymptotique à trois termes de $\frac{\pi}{2} - \arcsin x$. Au lieu de prendre un équivalent de $\arcsin'(t)$ comme dans la question précédente, on en calcule ici un développement asymptotique à trois termes, que l'on va intégrer (toujours en intégrant les relations de comparaison).

Pour $t \in]-1,1[$, en posant $u = 1-t$, on a

$$\begin{aligned}
\arcsin'(t) &= \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = (u(2-u))^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{2u}}\left(1-\frac{u}{2}\right)^{-1/2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2u}}\left(1+\frac{u}{4}+\frac{3u^2}{32}+\underset{u\to 0}{o}(u^2)\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2(1-t)}}\left(1+\frac{1-t}{4}+\frac{3}{32}(1-t)^2+\underset{t\to 1}{o}((1-t)^2)\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2(1-t)}}+\frac{1}{4\sqrt{2}}\sqrt{1-t}+\frac{3}{32\sqrt{2}}(1-t)^{3/2}+\underset{t\to 1}{o}((1-t)^{3/2})
\end{aligned}$$

Comme $\displaystyle\int_0^1 (1-t)^{3/2}dt$ est convergente (par le critère de Riemann), et comme l'intégrande est positive, on peut intégrer cette relation de comparaison, et il vient :

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{2}-\arcsin x &= \int_x^1 \arcsin'(t)dt \\
&= \int_x^1 \left(\frac{1}{\sqrt{2(1-t)}}+\frac{1}{4\sqrt{2}}\sqrt{1-t}+\frac{3}{32\sqrt{2}}(1-t)^{3/2}dt\right) \\
&\quad + \underset{x\to 1}{o}\left(\int_x^1 (1-t)^{3/2}dt\right) \\
&= \left[-\frac{2}{\sqrt{2}}\sqrt{1-t}-\frac{2}{12\sqrt{2}}(1-t)^{3/2}-\frac{3}{80\sqrt{2}}(1-t)^{5/2}\right]_x^1 \\
&\quad + \underset{x\to 1}{o}\left(\left[\frac{2}{5}(1-t)^{5/2}\right]_x^1\right) \\
&= \sqrt{2}\sqrt{1-x}+\frac{\sqrt{2}}{12}(1-x)^{3/2}+\frac{3\sqrt{2}}{160}(1-x)^{5/2} \\
&\quad + \underset{x\to 1}{o}((1-x)^{5/2})
\end{aligned}$$

En conclusion :

$$\arcsin x = \frac{\pi}{2}-\sqrt{2(1-x)}-\frac{\sqrt{2}}{12}(1-x)^{3/2}-\frac{3\sqrt{2}}{160}(1-x)^{5/2}+\underset{x\to 1}{o}((1-x)^{5/2}).$$

Exercice 11.6 : Calcul d'une intégrale à paramètre

Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{x-1}-1}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t$.

1. Vérifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et exprimer f' sans intégrale.

3. En déduire une expression de f sans intégrale.

1. Pour montrer que la fonction f est bien définie il suffit de démontrer que, pour tout réel $x > 0$ donné, la fonction $t \in]0,1[\mapsto \frac{t^{x-1}-1}{\ln(t)}$ est intégrable. Autrement dit, dans cette question, x est considérée comme une constante et on a affaire à un simple problème d'intégrabilité.

Pour $(x,t) \in \mathbb{R}_+^* \times]0,1[$ on pose
$$\varphi(x,t) = \frac{t^{x-1}-1}{\ln(t)}.$$
Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$. La fonction $t \mapsto \varphi(x,t)$ est bien définie et continue sur $]0,1[$.

Ceci ne suffit pas car, pour certaines valeurs de x, cette fonction peut diverger quand t tend vers 0 ou 1, auquel cas on ne peut pas conclure sans étudier plus précisément son comportement.
Le comportement quand t tend vers 0 dépend du signe de l'exposant de t ; nous allons donc distinguer les trois cas $x < 1$, $x = 1$ et $x > 1$.
Si $x < 1$, la fonction $t \mapsto t^{x-1}$ tend vers $+\infty$ en 0. Cependant, on sait que cette fonction est intégrable au voisinage de 0 si son exposant est strictement supérieur à -1, ce qui est le cas car il ne faut pas oublier que x a été supposé dans l'énoncé strictement positif.

▶ **Étude au voisinage de** 0 **:**

Nous allons distinguer les cas $x > 1$, $x = 1$ et $x < 1$ car le comportement de la fonction $t \mapsto t^{x-1}$ quand t tend vers 0 dépend du signe de l'exposant.

- Si $x > 1$: $t^{x-1} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$. Comme $\ln(t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} -\infty$ on a donc $\varphi(x,t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$. La fonction $t \mapsto \varphi(x,t)$ est donc intégrable au voisinage de 0.
- Si $x = 1$: $t^{x-1} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 1$. Comme $\ln(t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} -\infty$ on a donc $\varphi(x,t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$. La fonction $t \mapsto \varphi(x,t)$ est donc intégrable au voisinage de 0.
- Si $x < 1$: on a ici une forme indéterminée car $t^{x-1} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} +\infty$. Cependant, comme $\ln(t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} -\infty$ quand t tend vers 0 on a $\varphi(x,t) = \underset{t\to 0}{o}(t^{x-1})$. Or $x > 0$, donc $x - 1 > -1$ et $t \mapsto t^{x-1}$ est intégrable au voisinage de 0 d'après le critère de Riemann. On en déduit que $t \mapsto \varphi(x,t)$ est également intégrable au voisinage de 0.

Le problème quand t tend vers 1 est d'une autre nature : le numérateur et le dénominateur tendent tous les deux vers 0 ; nous avons affaire à une forme indéterminée.

▶ **Étude au voisinage de** 1 **:**

Pour tout réel $t \in]0,1[$, on pose $u = 1 - t$. Alors :
$$\frac{t^{x-1}-1}{\ln(t)} = \frac{(1-u)^{x-1}-1}{\ln(1-u)} \underset{u\to 0}{\sim} \frac{-(x-1)u}{-u} \underset{u\to 0}{\longrightarrow} (x-1).$$
Ainsi on a $\varphi(x,t) \underset{t\to 1}{\longrightarrow} x - 1$ donc $t \mapsto \varphi(x,t)$ est intégrable au voisinage de 1.
En conclusion, pour tout réel $x > 0$ fixé, la fonction $t \mapsto \varphi(x,t)$ est intégrable sur $]0,1[$, ce qui montre que la fonction f est bien définie pour tout $x > 0$.

2. Vérifions les hypothèses du théorème de dérivation des intégrales à paramètre. Nous avons déjà vérifié que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $t \mapsto \varphi(x,t)$ est intégrable sur $]0,1[$.
Il reste désormais à calculer la dérivée partielle de φ par rapport à x pour vérifier l'hypothèse de domination.

Pour $t \in]0,1[$, la fonction $x \mapsto \varphi(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t) = \frac{1}{\ln(t)} \frac{\partial}{\partial x}\left(t^{x-1} - 1\right) = \frac{1}{\ln(t)} \ln(t) t^{x-1} = t^{x-1}.$$

Ainsi pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, $t \mapsto \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $]0,1[$.

Dans le calcul de la dérivée partielle de φ par rapport à x, c'est cette fois t qui est traitée comme une constante. En particulier, la dérivée de t^{x-1} n'est pas $(x-1)t^{x-2}$ comme on l'a vu plus haut.

Pour pouvoir appliquer le théorème de dérivation sous le signe intégral il suffit désormais de vérifier la domination : il faut trouver une fonction $g :]0,1[\to \mathbb{R}$, intégrable, telle que, pour tous $x > 0$ et $t \in]0,1[$, $\left|\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant g(t)$. Autrement dit, nous cherchons à majorer $\left|\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t)\right|$ indépendamment de x par une fonction de t intégrable sur $]0,1[$.
Remarquons déjà que $t^{x-1} > 0$: on peut donc se passer de valeur absolue.
Une telle majoration n'est pas toujours possible. Supposons qu'il existe une telle fonction g : on a alors $t^{x-1} \leqslant g(t)$ pour tout $x > 0$ et $t \in]0,1[$. En particulier, en faisant tendre x vers 0 à t fixé dans cette inégalité, il vient $g(t) \geqslant \frac{1}{t}$, qui n'est pas intégrable sur $]0,1[$, donc g ne l'est pas non plus ! Nous venons en fait de démontrer par l'absurde qu'une telle fonction g n'existe pas.
Ce genre de situation est très fréquent avec les intégrales à paramètre. Cependant, on peut contourner le problème : il suffit en effet de vérifier l'hypothèse de domination sur tout segment inclus dans $\mathbb{R}_+^*$.
On pourra alors majorer aisément t^{x-1}, pour $x \in [a,b]$, indépendamment de x : en effet, on a alors

$$a - 1 \leqslant x - 1 \leqslant b - 1$$

donc, pour tout $t \in]0,1[$,

$$(b-1)\ln(t) \leqslant (x-1)\ln(t) \leqslant (a-1)\ln(t)$$

et enfin, par croissance de l'exponentielle,

$$t^{b-1} \leqslant t^{x-1} \leqslant t^{a-1},$$

seule la deuxième inégalité étant intéressante pour nous.

$t \in]0,1[$ donc $\ln(t) < 0$, ce qui inverse le sens des inégalités lorsque l'on multiplie par $\ln(t)$.

Fixons deux réels a et b avec $0 < a < b$. Pour $x \in [a,b]$ et $t \in]0,1[$ on a

$$\left|\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t)\right| = t^{x-1} = \mathrm{e}^{(x-1)\ln(t)} \leqslant \mathrm{e}^{(a-1)\ln(t)} = t^{a-1}$$

puisque $\ln(t) < 0$. La fonction $g : t \mapsto t^{a-1}$ est indépendante de x est intégrable sur $]0,1[$ car $a-1 > -1$ par le critère de Riemann.
L'hypothèse de domination est donc vérifiée sur tout segment inclus dans $\mathbb{R}_+^*$.
Ainsi, f est bien de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et de plus

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = \int_0^1 \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t^{x-1}\,\mathrm{d}t.$$

Lors de la domination, la fonction qui domine doit être indépendante du paramètre (ici x).

Il ne reste plus, enfin, qu'à calculer cette intégrale. La variable d'intégration est t : nous allons donc effectuer les calculs en considérant x comme une constante.
Ici, nous avons affaire à une fonction puissance dont on connaît une primitive.

En appliquant le théorème de dérivation des intégrales à paramètre nous avons dérivé t^{x-1} par rapport à x mais, pour le calcul d'intégrale qu'il nous reste à effectuer, nous devons déterminer une primitive de t^{x-1} par rapport à t.

Il s'agit de l'intégrale d'une fonction puissance d'exposant différent de -1 :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = \int_0^1 t^{x-1}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^x}{x}\right]_0^1 = \frac{1}{x}.$$

3. Nous savons bien sûr que la fonction logarithme est une primitive de f' sur $\mathbb{R}_+^*$. Il s'agit de ne pas aller trop vite : f est égale à la fonction logarithme... à une constante additive près qu'il faudra déterminer. Un moyen simple pour déterminer une telle constante est de calculer la valeur de f en un point où ce calcul est facile. Ici c'est la valeur en 1 qui s'impose car l'intégrale définissant f se simplifie alors considérablement.

D'après ce qui précède, il existe un réel K tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = K + \ln(x).$$

En particulier, il vient $K = f(1)$.
Par ailleurs, pour $x = 1$, on a $t^{x-1} = 1$ pour tout $t \in]0, 1[$, soit $\varphi(1, t) = 0$ et finalement $f(1) = 0$; on a donc $K = 0$ soit enfin

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = \ln(x).$$

Exercice 11.7 : Fonction Γ d'Euler

Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ on pose $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1} \mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t$.
1. Montrer que Γ est bien définie et de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Démontrer que, pour tout réel $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$. Que vaut $\Gamma(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$?

1. Il faut vérifier les hypothèses du théorème de dérivation des intégrales à paramètre pour montrer que Γ est de classe $\mathscr{C}^\infty$.
Commençons par vérifier que la fonction est bien définie.

Notons $u : (x, t) \mapsto t^{x-1}\, \mathrm{e}^{-t}$.
Pour $x > 0$ fixé, la fonction $t \mapsto u(x, t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. En effet, elle est continue, équivalente quand t tend vers 0 à t^{x-1}, qui est intégrable au voisinage de 0 car $x - 1 > -1$ (par le critère de Riemann), et comme $t^2 u(x, t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ par le théorème de croissance comparée, on a $u(x, t) = \underset{t \to +\infty}{o}(t^{-2})$ quand t tend vers $+\infty$.

Il faut ensuite calculer les dérivées partielles par rapport à x de la fonction u. Elle sont aisées à calculer si on se souvient que $t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} = \mathrm{e}^{(x-1)\ln(t)}\mathrm{e}^{-t}$, t étant considérée comme une constante dans le calcul de la dérivée partielle par rapport à x, on a

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = \ln(t)\mathrm{e}^{(x-1)\ln(t)}\mathrm{e}^{-t} = \ln(t)\, t^{x-1}\, \mathrm{e}^{-t}$$

puis par récurrence aisée

$$\frac{\partial^k u}{(\partial x)^k}(x, t) = (\ln(t))^k\, t^{x-1}\, \mathrm{e}^{-t}.$$

Pour $t \in \mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto u(x, t)$ est $\mathscr{C}^\infty$, et pour $k \in \mathbb{N}$ et $(x, t) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$,

$$\frac{\partial^k u}{(\partial x)^k}(x, t) = (\ln(t))^k\, t^{x-1}\, \mathrm{e}^{-t}.$$

Cette fonction est continue par morceaux par rapport à t sur $\mathbb{R}_+^*$.

Ce sont les hypothèses « faciles » du théorème, x étant constant dans le premier point et t constant dans le second. Il reste à dominer la dérivée partielle indépendamment de x.

> Parmi les hypothèses du théorème, la domination est de loin la plus importante. Il ne faut donc absolument pas l'oublier.

Comme souvent ceci pose problème car x peut ici prendre de grandes valeurs.
En effet, si on a, pour tous réels x et t, l'inégalité $\left|(\ln(t))^k t^{x-1} \mathrm{e}^{-t}\right| \leqslant |g(t)|$, il vient, pour $t > 0$ fixé, en faisant tendre x vers $+\infty$, $+\infty \leqslant |g(t)|$. Nous allons donc nous contenter de vérifier l'hypothèse de domination sur tout segment, c'est-à-dire d'obtenir une majoration du type précédent pour $x \in [a, b]$ plutôt que pour $x \in \mathbb{R}_+^*$.
Pour encadrer la puissance t^{x-1} en fonction de a et b, nous pouvons encadrer son logarithme $\ln(t^{x-1}) = (x-1)\ln(t)$. Comme le signe de $\ln(t)$ dépend de la position de t par rapport à 1 nous allons en fait obtenir deux majorations : l'une pour $t \in]0, 1]$, l'autre pour $t \in [1, +\infty[$. La fonction majorante $|g|$ obtenue sera ainsi définie par deux formules selon la position de t par rapport à 1.

Soient deux réels a et b avec $0 < a < b$ et $x \in [a, b]$.
Pour $t > 1$, on a $(x-1)\ln(t) \leqslant (b-1)\ln(t)$, car $\ln(t) > 0$, donc $0 < t^{x-1} \leqslant t^{b-1}$ et enfin, comme $(\ln(t))^k$ et e^{-t} sont positifs :

$$0 < (\ln(t))^k\, t^{x-1}\, \mathrm{e}^{-t} \leqslant (\ln(t))^k\, t^{b-1}\, \mathrm{e}^{-t}.$$

Pour $t < 1$, on a $\ln(t) < 0$, donc on trouve $0 < t^{x-1} \leqslant t^{a-1}$ et enfin, comme $|\ln(t)|^k > 0$ et $\mathrm{e}^{-t} > 0$:

$$0 < |\ln(t)|^k\, t^{x-1}\, \mathrm{e}^{-t} \leqslant |\ln(t)|^k\, t^{a-1}\, \mathrm{e}^{-t}.$$

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$g(t) = \begin{cases} |\ln(t)|^k\, t^{b-1}\, \mathrm{e}^{-t} & \text{si } t > 1 \\ |\ln(t)|^k\, t^{a-1}\, \mathrm{e}^{-t} & \text{si } t < 1 \\ 0 & \text{si } t = 1. \end{cases}$$

L'intégrabilité de g n'est pas a priori évidente car les formules la définissant sont compliquées. On peut résoudre ce problème en cherchant simplement à comparer g à des fonctions puissances.
En effet, si on a $g(t) = \underset{t\to 0}{o}(t^c)$ avec $c > -1$ alors g est intégrable au voisinage de 0. La condition $t^{-c}g(t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$ est équivalente à $|\ln(t)|^k t^{a-c-1}\mathrm{e}^{-t} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$ en utilisant la formule définissant $g(t)$ pour $t \in]0, 1[$.
L'exponentielle tendant vers 1 en 0 il suffit d'avoir $|\ln(t)|^k t^{a-c-1} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$. Le théorème de croissance comparée des fonctions logarithme et puissance nous assure que c'est le cas si $a-c-1 > 0$. Il suffit donc d'avoir $c < a-1$ pour que $g(t) = \underset{t\to 0}{o}(t^c)$ quand t tend vers 0. Comme on veut $c > -1$, on peut donc choisir n'importe quel $c \in]-1, a-1[$, par exemple le milieu de cet intervalle : $\frac{a}{2} - 1$.

L'intégrabilité en $+\infty$ peut être examinée de façon analogue à ceci près que la condition pour que $t \mapsto t^c$ soit intégrable au voisinage de $+\infty$ est $c < -1$.
Les calculs sont plus simples : on a toujours $t^{-c}g(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, quel que soit le réel c. On peut donc par exemple prendre $c = -2$ pour obtenir $g(t) = \underset{t\to+\infty}{o}(\frac{1}{t^2})$ et donc l'intégrabilité en $+\infty$.

On a alors :

$$\forall (x,t) \in [a,b] \times \mathbb{R}_+^*, \quad \left|(\ln(t))^k\, t^{x-1}\, \mathrm{e}^{-t}\right| \leqslant g(t)$$

avec g indépendante de x. Par ailleurs, g est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. En effet

- g est continue sur $]0,1[$ et sur $]1,+\infty[$ et aussi en 1.
- $t^{1-a/2}g(t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$ (par croissance comparée) donc $g(t) = \underset{t\to 0}{o}(t^{\frac{a}{2}-1})$. Or $t \mapsto t^{\frac{a}{2}-1}$ est intégrable au voisinage de 0 car $\dfrac{a}{2} - 1 > -1$ donc g est intégrable au voisinage de 0.
- $t^2 g(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (par croissance comparée) donc $g(t) = \underset{t\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$. Or $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ donc g est intégrable au voisinage de $+\infty$.

Ainsi, l'hypothèse de domination sur tout segment est vérifiée.
En conclusion, Γ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln(t))^k\, t^{x-1}\, \mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t.$$

2. Nous devons trouver une relation entre une intégrale faisant intervenir t^{x-1} et une intégrale faisant intervenir t^x, ce qui suggère une intégration par parties.

Les fonctions $u : t \mapsto \dfrac{t^x}{x}$ et $v : t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et vérifient $u(t)v(t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$ (car $x > 0$) et $u(t)v(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (par croissance comparée). Par intégration par parties, on a donc

$$\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t = \left[\frac{t^x}{x}\mathrm{e}^{-t}\right]_{t=0}^{t=+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{t^x}{x}\mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t.$$

Ainsi $\Gamma(x) = \dfrac{1}{x}\Gamma(x+1)$.

Ceci étant établi, on tire l'équation de récurrence pour trouver la valeur de $\Gamma(n)$:

$$\Gamma(n) = (n-1)\,\Gamma(n-1) = (n-1)\,(n-2)\,\Gamma(n-2) = \cdots = (n-1)!\,\Gamma(1).$$

Il suffit alors de calculer $\Gamma(1)$ pour conclure.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\Gamma(n) = (n-1)\,\Gamma(n-1) = (n-1)\,(n-2)\,\Gamma(n-2) = \cdots = (n-1)!\,\Gamma(1).$$

D'autre part,

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = 1.$$

donc $\Gamma(n) = (n-1)!$.

Exercice 11.8 : Une formule d'Euler

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$ on pose $I_{n,p}(x) = \displaystyle\int_0^n t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^p \mathrm{d}t$.

1. Justifier l'existence de ces intégrales.

2. Calculer $I_{n,0}(x)$.

3. Donner, pour $p \geqslant 1$, une relation entre $I_{n,p}(x)$ et $\mathrm{I}_{n,p-1}(x+1)$; en déduire l'expression de $I_{n,p}(x)$ en fonction de n, p et x mais sans intégrale.

4. Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} = \Gamma(x),$$

la fonction Γ ayant été définie à l'exercice **11.4**.

5. En déduire, à l'aide de la formule de Stirling, la valeur de $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

1. La fonction intégrée est toujours continue sur $]0,n]$ (et même en 0 si $x > 1$). En 0, nous avons un équivalent simple.

Fixons deux entiers $n > 0$ et $p \geqslant 0$ quelconques et un réel $x > 0$. La fonction

$$u_p : t \mapsto t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^p$$

est définie et continue sur $]0,n]$. De plus $u_p(t) \underset{t\to 0}{\sim} t^{x-1}$, et comme $x-1 > -1$, cette fonction est intégrable sur $[0,n]$ par le critère de Riemann.
Ainsi u_p est intégrable sur $]0,n]$ et $I_{n,p}(x)$ est bien définie.

2. Ce cas est élémentaire car on doit intégrer une simple fonction puissance.

Comme $x \neq 0$, une primitive de $t \mapsto t^{x-1}$ est $t \mapsto \dfrac{t^x}{x}$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$I_{n,0}(x) = \int_0^n t^{x-1}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^x}{x}\right]_0^n = \frac{n^x}{x}.$$

3. Une comparaison des expressions de $I_{n,p}(x)$ et $\mathrm{I}_{n,p-1}(x+1)$ montre que les seuls éléments qui diffèrent sont les puissances intervenant dans la fonction intégrée.
Nous allons pouvoir intégrer par parties pour faire apparaître t^x à partir de t^{x-1} (en primitivant) et $\left(1-\frac{t}{n}\right)^{p-1}$ à partir de $\left(1-\frac{t}{n}\right)^p$ (en dérivant).

Dans le calcul de la dérivée, nous avons affaire à une fonction de la forme u^p donc la dérivée est $pu^{p-1}u'$. Il ne faut pas oublier u', qui ici est la constante $-\frac{1}{n}$.

En intégrant par parties, les fonctions $t \mapsto t^x$ et $t \mapsto \left(1-\dfrac{t}{n}\right)^p$ étant de classe $\mathscr{C}^1$, il vient

$$\begin{aligned} I_{n,p}(x) &= \int_0^n t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^p \mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{t^x}{x}\left(1-\frac{t}{n}\right)^p\right]_0^n - \int_0^n \frac{t^x}{x}p\left(-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{t}{n}\right)^{p-1} \mathrm{d}t \\ &= \frac{p}{nx}\int_0^n t^x\left(1-\frac{t}{n}\right)^{p-1} \mathrm{d}t \\ &= \frac{p}{nx}\mathrm{I}_{n,p-1}(x+1). \end{aligned}$$

Si $p \geqslant 2$, on peut appliquer encore une fois la formule précédente :

$$I_{n,p}(x) = \frac{p}{nx}\mathrm{I}_{n,p-1}(x+1) = \left(\frac{p}{nx}\right)\left(\frac{p-1}{n(x+1)}\right)\mathrm{I}_{n,p-2}(x+2).$$

En répétant p fois ceci on aura la formule :

$$\begin{aligned} I_{n,p}(x) &= \left(\frac{p}{nx}\right)\left(\frac{p-1}{n(x+1)}\right)\cdots\left(\frac{1}{n(x+p-1)}\right)I_{n,0}(x+p) \\ &= \frac{p!}{n^p(x(x+1)\cdots(x+p-1))} \times \frac{n^{x+p}}{x+p} \\ &= \frac{p!n^x}{x(x+1)\cdots(x+p)} \end{aligned}$$

Si l'on voulait être parfaitement rigoureux il faudrait vérifier cette formule par récurrence, mais ce n'est pas la difficulté de la question.

4. Sans surprise l'expression trouvée précédemment ressemble à celle qui intervient dans cette question qui concerne le cas particulier $p = n$; plus précisément, il est demandé ici de montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_{n,n}(x) = \Gamma(x)$.

On a $I_{n,n}(x) = \displaystyle\int_0^n t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \mathrm{d}t$. L'emploi du théorème de convergence dominée semble s'imposer mais il y a une objection de taille : les bornes de l'intégrale dépendent elles aussi de n. Il va donc falloir travailler un peu cette expression pour appliquer le théorème.

Pour éliminer n des bornes de l'intégrale afin d'appliquer le théorème de convergence dominée il existe une méthode efficace consistant à prolonger la fonction par 0 sur $\mathbb{R}_+$.

Plus précisément, on peut écrire

$$I_{n,n}(x) = \int_0^n t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$$

où la fonction f_n est définie par

$$f_n(t) = \begin{cases} t^{x-1}\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n & \text{si } t \leqslant n \\ 0 & \text{si } t > n \end{cases}$$

Cette dernière expression peut être écrite plus clairement sous la forme

$$f_n(t) = \chi_n(t) t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$$

où χ_n est la fonction indicatrice de l'intervalle $[0, n]$.
Vu sous cette forme il est clair que f_n est continue par morceaux car χ_n l'est.
Maintenant nous pouvons tenter d'appliquer le théorème de convergence dominée à la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$: l'intervalle d'intégration est bien fixe !
Pour appliquer ce théorème, il faut tout d'abord vérifier que les fonctions f_n sont bien continues par morceaux et intégrables sur $\mathbb{R}_+^*$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}_+^*$ on pose

$$f_n(t) = \chi_n(t) t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$$

où χ_n est la fonction indicatrice de l'intervalle $[0, n]$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit de fonctions continues par morceaux.
Par ailleurs, nous avons vu précédemment que la fonction $t \mapsto t^{x-1} \left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n$ est intégrable sur $[0, n]$; f_n est donc intégrable au voisinage de 0.
Enfin, f_n est nulle au voisinage de l'infini donc f_n est intégrable au voisinage de l'infini.
$(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est donc une suite de fonctions continues par morceaux et intégrables sur $\mathbb{R}_+^*$.

Ensuite, il faut étudier la convergence simple de la suite de fonctions de terme général f_n.
Rappelons que la limite de $\left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n$ quand n tend vers $+\infty$ se retrouve aisément en passant au logarithme :

$$\ln\left(\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right) = n \ln\left(1 - \frac{t}{n}\right).$$

Comme n tend vers $+\infty$, on peut utiliser l'équivalent $\ln(1+h) \underset{h \to 0}{\sim} h$ quand h tend vers 0 pour trouver la limite cherchée. Après calculs, on trouve que $\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{-t}$.

Fixons un réel positif t. Alors :

- d'une part, $\chi_n(t) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, car $\chi_n(t) = 1$ si $t \leqslant n$ et est donc constante à partir d'un certain rang (par exemple $1 + \lfloor t \rfloor$) ;
- d'autre part, $t^{x-1}\left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$. En effet, on a successivement, en utilisant l'équivalent $\ln(1+h) \underset{h\to 0}{\sim} h$ quand h tend vers 0 :
$$\ln\left(\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right) = n\ln\left(1 - \frac{t}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\left(-\frac{t}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -t$$
et donc, l'exponentielle étant continue :
$$\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{-t}$$
soit enfin
$$t^{x-1}\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}.$$

Ainsi, la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers la fonction $t \mapsto t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$.

Ceci est un bon point : si on peut intervertir intégrale et limite nous retrouverons bien l'intégrale définissant la fonction Γ.
Reste l'hypothèse de domination : nous devons trouver une fonction g, intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, telle que $|f_n(t)| \leqslant g(t)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}_+^*$. Notons déjà que les fonctions f_n sont positives.
La difficulté, pour majorer indépendamment de n, vient du facteur $(1 - \frac{t}{n})^n$. Pour cela, reprenons le calcul de la limite ; nous avons seulement montré que $n\ln(1 - \frac{t}{n})$ tend vers $-t$ quand n tend vers $+\infty$ alors qu'on peut dire mieux grâce à l'inégalité de convexité classique : $\ln(1+h) \leqslant h$ pour tout réel $h > -1$. Cette inégalité traduit le fait que la représentation graphique du logarithme est situé sous sa tangente en 1, conséquence de sa concavité due à sa dérivée seconde négative en tout point.

Attention, ceci n'a de sens que si $t < n$, afin d'avoir $h > -1$ et donc que le logarithme ait bien un sens !

Nous allons donc être confronté à une deuxième difficulté : passer d'une majoration sur $]0, n[$ a une majoration sur $\mathbb{R}_+^*$.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in]0, n[$. Avec $h = -\dfrac{t}{n} \in]-1, 0[$ il vient, par concavité du logarithme,
$$\ln\left(1 - \frac{t}{n}\right) \leqslant -\frac{t}{n}$$
d'où, comme $n > 0$,
$$n\ln\left(1 - \frac{t}{n}\right) \leqslant -t$$

et enfin, par croissance de l'exponentielle :

$$\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}^{-t}.$$

Comme la fonction f_n est nulle sur $[n,+\infty[$, la majoration précédente reste vraie pour $t > n$. On a donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad |f_n(t)| \leqslant t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}.$$

La fonction $t \mapsto t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$ étant indépendante de n et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ on a, d'après le théorème de convergence dominée :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

Or, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{n} t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \mathrm{d}t = I_{n,n}(x).$$

En utilisant l'expression de $I_{n,n}(x)$ établie à la question 3, on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)} = \Gamma(x).$$

5. Il n'y a qu'à substituer $\frac{1}{2}$ à x dans la formule précédente. La limite obtenue fera intervenir $n!$ mais aussi le produit $\frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times \cdots \times \frac{2n+1}{2}$, qui peut s'écrire à l'aide de factorielles.

On a, d'après ce qui précède :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!n^{1/2}}{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)\cdots(\frac{1}{2}+n)}.$$

Pour simplifier le dénominateur, on peut factoriser $\frac{1}{2}$ dans chaque terme. Pour passer du produit d'entiers impairs successifs ainsi obtenu à une factorielle, il suffira de multiplier par un produit d'entiers pairs. Enfin, un produit d'entiers pairs peut se simplifier en factorisant 2 dans chaque terme.

Nous avons

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}+n\right) = \frac{1}{2^{n+1}}(1 \times 3 \times \cdots \times (2n+1)).$$

Or

$$\big(2 \times 4 \times \cdots \times (2n)\big) \times \big(1 \times 3 \times \cdots \times (2n+1)\big) = (2n+1)!$$

et

$$2 \times 4 \times \cdots \times (2n) = 2^n(1 \times 2 \times \cdots \times n) = 2^n n!.$$

On en déduit que

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}+n\right) = \frac{(2n+1)!}{2^{2n+1}n!}.$$

et donc que

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n!)^2\sqrt{n}\,2^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Enfin, pour déterminer la limite d'une expression comportant des factorielles, nous pouvons utiliser la formule de Stirling.

D'une part, d'après la formule de Stirling,

$$n! \sim n^n \mathrm{e}^{-n}\sqrt{2\pi n}$$

donc

$$(n!)^2 \sim 2\pi n^{2n+1}\mathrm{e}^{-2n}.$$

D'autre part, toujours d'après cette formule, on a :

$$(2n+1)! \sim (2n+1)^{2n+1}\mathrm{e}^{-(2n+1)}\sqrt{2\pi(2n+1)}.$$

Nous avons

$$(2n+1)^{2n+1} = (2n+1)(2n)^{2n}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n} \sim \mathrm{e}(2n+1)(2n)^{2n}$$

car

$$\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n} = \exp\left(2n\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}$$

et

$$\sqrt{2\pi(2n+1)} \sim \sqrt{4\pi n} = 2\sqrt{\pi n}.$$

Par conséquent

$$(2n+1)! \sim (2n+1)(2n)^{2n}\mathrm{e}^{-2n}\,2\sqrt{\pi n}.$$

Il vient donc, en simplifiant avec soin les expressions :

$$\frac{(n!)^2\sqrt{n}\,2^{2n+1}}{(2n+1)!} \sim \frac{2\pi n^{2n+1}\mathrm{e}^{-2n}\sqrt{n}\,2^{2n+1}}{(2n+1)2^{2n}n^{2n}\mathrm{e}^{-2n}\,2\sqrt{\pi n}} \sim \frac{2n\sqrt{\pi}}{(2n+1)}$$

et cette dernière expression tend vers $\sqrt{\pi}$ quand n tend vers $+\infty$. On en déduit que

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Par définition :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

Le changement de variable $u = t^{\frac{1}{2}}$ donne alors

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u$$

donc

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

On retrouve ainsi l'intégrale de Gauss, calculée par une autre méthode dans l'exercice **11.11**.

Exercice 11.9 : Transformée de Laplace du sinus cardinal

On pose, pour $t > 0$, $f(t) = \dfrac{\sin(t)}{t}$, et $f(0) = 1$ (f est la fonction *sinus cardinal*, que l'on rencontre en physique dans l'étude du phénomène de diffraction).
D'après l'exercice **11.4** on sait que f est continue, non intégrable sur $\mathbb{R}_+$ mais que $\displaystyle\int_0^A f(t)\,\mathrm{d}t$ possède une limite finie quand A tend vers $+\infty$. Le but de cet exercice et du suivant est de calculer cette limite.
Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ on pose :

$$\varphi(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Démontrer que φ est définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Calculer explicitement (sans intégrale) la valeur de $\varphi'(x)$ pour tout réel $x > 0$.
3. Déterminer la limite de φ en $+\infty$; en déduire l'expression de $\varphi(x)$ sans intégrale pour tout réel $x > 0$.

1. L'intégrabilité de la fonction est immédiate grâce à l'exponentielle.

Vérifions que, pour tout réel $x > 0$ fixé, la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-xt} f(t)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.
Nous savons que, pour tout réel t, $|\sin(t)| \leqslant |t|$ (il suffit d'appliquer l'inégalité des accroissements finis à la fonction sinus, dont la dérivée est majorée en valeur absolue par 1, entre 0 et t). Ainsi, $|f(t)| \leqslant 1$.
Étant donné que $|f| \leqslant 1$, on a $|\mathrm{e}^{-xt} f(t)| \leqslant \mathrm{e}^{-xt}$. La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-xt}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$, car $x > 0$, donc la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-xt} f(t)$ aussi, ce qui montre que $\varphi(x)$ est bien définie pour tout réel $x > 0$.

On cherche ensuite à appliquer le théorème de dérivation des intégrales à paramètres.

Dans ce théorème, il faut faire attention à dériver par rapport au paramètre (ici x) et non par rapport à la variable d'intégration (ici t).

Notons $u : (x,t) \mapsto \mathrm{e}^{-xt} f(t)$. On vient de voir que pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, $t \mapsto u(x,t)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Pour $t \in \mathbb{R}_+$, $x \mapsto u(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et on a

$$\frac{\partial}{\partial x}(\mathrm{e}^{-xt} f(t)) = -t\mathrm{e}^{-xt} f(t) = -\mathrm{e}^{-xt}\sin(t).$$

Cette fonction est continue par rapport à t sur $\mathbb{R}_+$.

Il ne suffit pas de montrer que cette fonction est intégrable pour tout $x > 0$: pour appliquer le théorème de dérivation des intégrales à paramètres il faut encore la majorer indépendamment de x par une fonction de t intégrable sur $[0, +\infty[$.
Malheureusement, comme souvent, ce n'est pas possible : si une telle fonction h existait, on aurait, pour tout réel $x > 0$ et $t \in \mathbb{R}_+$: $|-\mathrm{e}^{-xt}\sin(t)| \leqslant h(t)$ d'où, quand x tend vers 0 : $|\sin(t)| \leqslant h(t)$, ce qui contredit l'intégrabilité de h. La manière usuelle de contourner ce problème est de montrer une domination locale, ici sur $[a, +\infty[$. Autrement, dit, nous n'allons pas chercher une fonction h vérifiant $|-\mathrm{e}^{-xt}\sin(t)| \leqslant h(t)$ pour tout réel $x > 0$ mais uniquement pour $x \geqslant a$.

Fixons un réel $a > 0$. Alors, pour tout réel $x \in [a, +\infty[$: $|-\mathrm{e}^{-xt}\sin(t)| \leqslant \mathrm{e}^{-at}$. Or la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-at}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ et indépendante de x ; ainsi nous avons la domination locale.
Enfin, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $t \mapsto \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t)$ continue sur $\mathbb{R}_+$, et dominée par une fonction intégrable. C'est donc une fonction intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
Nous avons donc montré que φ est de classe $\mathscr{C}^1$ (par le théorème de dérivation des intégrales à paramètre) sur $\mathbb{R}_+^*$ et que pour tout $x > 0$:

$$\varphi'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x}(\mathrm{e}^{-xt} f(t))\,\mathrm{d}t = -\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\sin(t)\,\mathrm{d}t.$$

2. Pour calculer l'intégrale d'un produit d'une exponentielle et d'une fonction circulaire on passe par les nombres complexes. Ici, on utilise $\sin(t) = \mathrm{Im}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})$.
Rappelons que, si λ est un nombre complexe de partie réelle strictement négative, la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{\lambda t}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{\lambda}$.

En utilisant la relation $\sin(t) = \mathrm{Im}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})$, on a successivement

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\sin(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{Im}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\,\mathrm{d}t = \mathrm{Im}\left(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{(\mathrm{i}-x)t}\,\mathrm{d}t\right)\\ &= \mathrm{Im}\left(\frac{1}{x-\mathrm{i}}\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{x+\mathrm{i}}{1+x^2}\right) = \frac{1}{1+x^2},\end{aligned}$$

d'où

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \varphi'(x) = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Ce type d'intégrale peut aussi se calculer en intégrant deux fois par parties, mais les calculs sont un peu plus longs. Il vaut mieux privilégier la méthode ci-dessus.

3. On peut souvent être tenté d'utiliser le théorème de convergence dominée pour déterminer la limite en $+\infty$ d'une intégrale à paramètres. Même si cela fonctionne bien et est parfois nécessaire il est souvent plus rentable d'essayer une majoration directe.

Nous avons vu que $|f| \leqslant 1$. On a donc

$$|\varphi(x)| \leqslant \int_0^{+\infty} \left|\mathrm{e}^{-xt} f(t)\right| \mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}$$

d'où l'on tire $\varphi(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Par ailleurs, nous savons que, pour tout réel $x > 0$, $\varphi'(x) = -\dfrac{1}{1+x^2}$. Il existe donc un réel K tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \varphi(x) = K - \arctan(x).$$

L'expression ci-dessus tend vers $K - \dfrac{\pi}{2}$ quand x tend vers $+\infty$. Étant donné par ailleurs que $\varphi(x)$ tend vers 0 en $+\infty$, on en déduit que $K = \dfrac{\pi}{2}$, d'où finalement :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \varphi(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x).$$

Exercice 11.10 : Calcul de l'intégrale de Dirichlet

On garde les notations de l'exercice **11.9**. On pose $\ell = \lim\limits_{A\to+\infty} \displaystyle\int_0^A f(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que la fonction définie par $g(x) = \dfrac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x}$, pour $x > 0$, et $g(0) = 1$, est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

2. Démontrer que g' est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

3. Soient A et x deux réels strictement positifs. Montrer que :

$$\int_0^A \mathrm{e}^{-xt} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^A f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^{Ax} g(u)\sin\left(\frac{u}{x}\right)\mathrm{d}u.$$

4. Montrer que, pour tout réel $x > 0$:

$$|\varphi(x) - \ell| \leqslant x\left(1 + \int_0^{+\infty} |g'(u)|\,\mathrm{d}u\right).$$

5. En déduire la valeur de ℓ.

1. La fonction g est clairement de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Le seul problème se pose en 0. Par le théorème de prolongement $\mathscr{C}^1$, il faut montrer que g est continue en 0 et que g' admet une limite finie en 0.

La fonction g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, comme quotient de fonctions qui le sont (le dénominateur ne s'annulant pas).
Par ailleurs, g admet une limite en 0. En effet, on a le développement limité : $\mathrm{e}^{-x} = 1 - x + \underset{x\to 0}{o}(x)$. Ainsi, $g(x) = 1 + \underset{x\to 0}{o}(1)$, c'est-à-dire $g(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$. On en déduit que g est continue en 0.

Pour étudier la limite de g' en 0 nous aurons encore affaire à une forme indéterminée mais, cette fois, avec x^2 au dénominateur. Un développement limité à l'ordre 2 en 0 du numérateur permettra de conclure.

Un calcul élémentaire donne :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad g'(x) = \frac{x\mathrm{e}^{-x} - (1 - \mathrm{e}^{-x})}{x^2}.$$

Utilisons cette fois-ci un développement limité à l'ordre 2 en 0 :

$$\mathrm{e}^{-x} = 1 - x + \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2).$$

En ne retenant au cours des calculs que les termes de degré n'excédant pas 2 :

$$x\mathrm{e}^{-x} - (1 - \mathrm{e}^{-x}) = x - x^2 - \left(x - \frac{1}{2}x^2\right) + \underset{x\to 0}{o}(x^2) = -\frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$$

d'où $g'(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\dfrac{1}{2}$.
Par le théorème de prolongement $\mathscr{C}^1$, g est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ (et $g'(0) = -\dfrac{1}{2}$).

Avec les séries entières, on peut aller plus vite en montrant que

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)!}x^n$$

est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ comme somme d'une série entière de rayon de convergence infini.

2. Nous savons déjà que g' est continue sur $\mathbb{R}_+$. Pour montrer qu'elle est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ il suffit d'étudier son comportement en $+\infty$. Comme l'expression de g' fait intervenir des polynômes et des exponentielles on peut chercher à comparer g' à des fonctions puissances.

La fonction g' est continue sur $\mathbb{R}_+$.

On remarque que $x^2g'(x) = xe^{-x} - (1 - e^{-x}) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -1$; on a donc $|g'(x)| \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^2}$. D'après le critère de comparaison avec les intégrales de Riemann, g' est donc intégrable au voisinage de $+\infty$.
Par ailleurs, g' est continue en 0 donc intégrable au voisinage de 0.
Ainsi, g' est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

3. Sachant que $f(t) = \frac{\sin(t)}{t}$ on a

$$(e^{-xt} - 1)f(t) = (e^{-xt} - 1)\frac{\sin(t)}{t}.$$

L'argument de l'exponentielle étant xt, nous pouvons faire apparaître $g(xt)$ en écrivant

$$(e^{-xt} - 1) \times \frac{\sin(t)}{t} = \frac{e^{-xt} - 1}{xt} \times x\sin(t).$$

On a successivement, par définition des fonctions f et g :

$$\begin{aligned}\int_0^A e^{-xt} f(t)\,dt - \int_0^A f(t)\,dt &= \int_0^A (e^{-xt} - 1)f(t)\,dt \\ &= \int_0^A -xtg(xt)f(t)\,dt \\ &= \int_0^A -xg(xt)\sin(t)\,dt.\end{aligned}$$

Enfin, pour avoir $g(u)$ plutôt que $g(xt)$ dans l'intégrale, il suffit de poser $u = xt$, soit $t = \frac{u}{x}$; ceci est licite car $x \neq 0$. Les bornes 0 et A deviennent alors 0 et Ax et $dt = \frac{du}{x}$.

Effectuons le changement de variable affine $u = xt$. Il vient :

$$\int_0^A -xg(xt)\sin(t)\,dt = -\int_0^{Ax} g(u)\sin\left(\frac{u}{x}\right)\,du.$$

4. Il faudra faire apparaître des intégrales de 0 à $+\infty$: pour cela, nous pourrons chercher à faire tendre A vers $+\infty$ dans le résultat précédent. En effet, le membre de gauche de l'inégalité de la question précédente tend, par définition, vers $\varphi(x) - \ell$ quand A tend vers $+\infty$.
Le résultat souhaité est exprimé à l'aide de g' et non de g. Pour faire apparaître une intégrale faisant intervenir g' à partir d'une intégrale faisant intervenir g, l'outil le plus évident est l'intégration par parties.

> ⚠ Il faut être prudent sur les noms de variables. Ici, nous effectuons une intégration par parties sur une intégrale d'une fonction de variable u. La lettre x désigne ici une constante !

Soit $A > 0$. Les fonctions g et $v : u \mapsto x\cos\left(\frac{u}{x}\right)$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, A]$ (par la question 1 pour g). Une intégration par parties donne donc

$$\int_0^{Ax} g(u)\sin\left(\frac{u}{x}\right)\,\mathrm{d}u = \left[-xg(u)\cos\left(\frac{u}{x}\right)\right]_0^{Ax} + x\int_0^{Ax} g'(u)\cos\left(\frac{u}{x}\right)\,\mathrm{d}u.$$

Or

$$\left[-xg(u)\cos\left(\frac{u}{x}\right)\right]_0^{Ax} = x - xg(Ax)\cos(A) \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} x.$$

puisque $g(y) \underset{y\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Ainsi, on a, avec la question précédente,

$$\left|\int_0^A \mathrm{e}^{-xt}f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^A f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant |x - xg(Ax)\cos(A)| + x\int_0^{Ax} |g'(u)|\,\mathrm{d}u.$$

D'autre part g' est intégrable, donc la deuxième intégrale admet une limite finie quand A tend vers l'infini.

Au final, nous avons, en faisant tendre A vers $+\infty$, :

$$|\varphi(x) - \ell| \leqslant x\left(1 + \int_0^{+\infty} |g'(u)|\,\mathrm{d}u\right).$$

C'est parce que g' est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ que l'intégrale de $|g'(u)|$ existe et est finie. Cette propriété de g' est donc essentielle pour conclure.

5. La question précédente montre que φ tend vers ℓ en 0. Par ailleurs, on connaît l'expression de $\varphi(x)$ pour $x > 0$ d'après l'exercice précédent ; il ne reste qu'à combiner ces deux résultats.

D'après la question précédente, il existe une constante M telle que, pour tout réel $x > 0$, $|\varphi(x) - \ell| \leqslant Mx$. En particulier, $\varphi(x) \underset{x\to0}{\longrightarrow} \ell$.

Par ailleurs on sait d'après l'exercice précédent que, pour tout réel $x > 0$, $\varphi(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x)$. On a donc $\varphi(x) \underset{x\to0}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}$.

Par unicité de la limite il vient :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 11.11 : Intégrale de Gauss

Pour tout réel positif x on pose :

$$f(x) = \left(\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2 \quad \text{et} \quad g(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que f et g sont bien définies et calculer leur dérivée. On ne cherchera pas à calculer les intégrales qui interviendront.

2. Montrer que, pour tout réel positif x, $f(x) + g(x) = \dfrac{\pi}{4}$.

3. Déterminer la limite de g en $+\infty$.

4. En déduire la valeur de l'intégrale de Gauss $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Commençons par l'étude de la fonction f.

Il ne faut pas aller trop vite : f n'est pas une intégrale à paramètre ! En effet, la variable x apparaît dans une borne de l'intégrale et non dans la fonction de t qui est intégrée.

En fait, f est tout simplement le carré d'une primitive de $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$.

Soit F la primitive sur $\mathbb{R}_+$ nulle en 0 de la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$. Alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad F(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

De plus, F est de classe $\mathscr{C}^1$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad F'(x) = \mathrm{e}^{-x^2}.$$

Par ailleurs, $f = F^2$. Ainsi f est de classe $\mathscr{C}^1$ et $f' = 2FF'$, soit

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f'(x) = 2\,\mathrm{e}^{-x^2} \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Continuons avec l'étude de la fonction g

La fonction g, elle, est bien définie par une intégrale à paramètre. Nous allons donc vérifier les hypothèses du théorème de dérivation de ces intégrales.

Pour $(x, t) \in \mathbb{R}_+ \times [0, 1]$ posons

$$\varphi(x, t) = \frac{\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}.$$

(1) Soit $x \in \mathbb{R}_+$. L'application $t \in [0, 1] \mapsto \varphi(x, t)$ est intégrable sur $[0, 1]$ puisqu'elle est continue et que toute fonction continue sur un segment est intégrable.

(2) φ possède une dérivée partielle par rapport à x et on a

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}_+ \times [0,1], \quad \begin{aligned}\frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial x} &= -2x(1+t^2)\frac{\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\\ &= -2x\,\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}.\end{aligned}$$

(3) Soit $x \in \mathbb{R}_+$. L'application $t \in [0,1] \mapsto \dfrac{\partial \varphi(x,t)}{\partial x}$ est intégrable sur $[0,1]$ car elle y est continue et toute fonction continue sur un segment est intégrable.

Ces premiers points sont en général faciles à vérifier : on traite séparément les variables x et t. Dans les points 1 et 3, on se pose la question de l'intégrabilité d'une fonction quand x est considérée comme une constante. Dans le point 2, on calcule une dérivée partielle ; pour cela, c'est t que l'on considère comme une constante pour dériver par rapport à x.
Vient enfin le dernier point, essentiel pour appliquer le théorème : l'hypothèse de domination.
Ici, comme $1+t^2 \geqslant 1$, on a déjà la majoration grossière $\left|-2\,x\,\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}\right| \leqslant 2\,x\,\mathrm{e}^{-x^2}$.

On pourrait montrer que cette fonction est bornée sur $\mathbb{R}_+$, donc majorée par une fonction constante, intégrable sur le segment $[0,1]$. On peut cependant aller beaucoup plus vite en ne regardant que la domination locale.

Soit $a < b \in \mathbb{R}_+$. On a, pour tout $(x,t) \in [a,b] \times [0,1]$:

$$\left|\frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial x}\right| \leqslant 2\,x\,\mathrm{e}^{-x^2} \leqslant 2\,b\,\mathrm{e}^{-a^2}.$$

et la fonction constante $2\,b\,\mathrm{e}^{-a^2}$ est indépendante de x, intégrable sur $[0,1]$.
Ainsi, la fonction g est donc de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad g'(x) = \int_0^1 \frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial x}\,\mathrm{d}t$$

soit

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad g'(x) = \int_0^1 -2\,x\,\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$$

ou encore, comme x ne dépend pas de t

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad g'(x) = -2\,x\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$$

2. Pour montrer que la fonction $f+g$ est constante, il suffit de montrer que sa dérivée est nulle. Pour cela, on peut se servir des calculs précédents. Le calcul de la valeur de

cette constante pourra alors se faire en choisissant une valeur particulière de x pour laquelle les calculs sont simples.
Le problème est que l'intégrale intervenant dans l'expression de f' a pour bornes 0 et x alors que celle de g' a pour bornes 0 et 1. Nous allons donc effectuer un changement de variable pour ne plus avoir que des intégrales sur un même intervalle.
Pour cela, nous allons poser $u = x\,t$; il viendra $\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}u}{x}$ et les bornes 0 et 1 deviendront 0 et x.

> Pour effectuer le changement de variable $u = xt$, il est nécessaire de supposer $x \neq 0$. Nous devrons donc traiter séparément le cas où $x = 0$.

Fixons un réel $x > 0$ et effectuons le changement de variable affine $u = x\,t$ dans l'intégrale précédente. Il vient successivement

$$\begin{aligned} g'(x) &= -2\,x \int_0^x \mathrm{e}^{-x^2(1+(u/x)^2)}\,\frac{\mathrm{d}u}{x} = -2 \int_0^x \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u \\ &= -2\,\mathrm{e}^{-x^2} \int_0^x \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u. \end{aligned}$$

soit $g'(x) = -f'(x)$. La fonction $f+g$ est donc constante sur $\mathbb{R}_+$ car sa dérivée est nulle sur l'intervalle ouvert associé.

Il reste à déterminer la valeur de cette constante. Le plus simple est de la calculer en évaluant $f(x) + g(x)$ en $x = 0$.

En particulier, pour $x = 0$, on a $f(0) = 0$ tandis que $g(0) = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}$.
Ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) + g(x) = \frac{\pi}{4}.$$

3. Dans l'intégrale qui définit g figure l'expression $\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}$, qui tend très vite vers 0 quand x tend vers $+\infty$, quel que soit t. Ceci nous conduit à penser que g tend vers 0 en $+\infty$. C'est ce que nous allons montrer. À cet effet, il est possible d'utiliser le théorème de convergence dominée.
Même si cette méthode fonctionne ici, on peut aussi chercher une majoration de g par une fonction tendant vers 0 en $+\infty$. Ce procédé est d'ailleurs plus rapide et plus simple.
On peut bien sûr majorer $\dfrac{\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$ par 1, mais ceci ne donnera que $g \leqslant 1$. Nous allons donc être plus précis en conservant le facteur e^{-x^2} qui assurera la convergence vers 0.

Soit $x \in \mathbb{R}_+$. De l'inégalité

$$0 \leqslant g(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

on tire, en factorisant e^{-x^2} dans l'intégrale :

$$0 \leqslant g(x) = \mathrm{e}^{-x^2} \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-(xt)^2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Comme, pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}_+ \times [0,1]$, $0 \leqslant \mathrm{e}^{-(xt)^2} \leqslant 1$ et $1+t^2 \geqslant 1$, l'intégrale est inférieure à 1 et il vient $0 \leqslant g(x) \leqslant \mathrm{e}^{-x^2}$ ce qui montre que $g(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

4. Des deux questions précédentes on tire $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{4}$. On ne peut pas immédiatement en déduire $\left(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2 = \frac{\pi}{4}$: encore faut-il auparavant s'assurer de l'existence de l'intégrale dont la valeur est demandée.

La fonction $h : t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et on a $t^2\mathrm{e}^{-t^2} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par le théorème de croissance comparée. Ainsi $\mathrm{e}^{-t^2} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ et h intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Par suite, f admet une limite en $+\infty$ qui est $\left(\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2$.

D'autre part, on sait que $f+g$ est constante égale à $\dfrac{\pi}{4}$ et que g tend vers 0 en $+\infty$. On a donc également $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\pi}{4}$.

Comme la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ est positive, son intégrale de 0 à $+\infty$ l'est également, d'où

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Exercice 11.12 : Théorème de d'Alembert-Gauss

Le but de cet exercice est de démontrer le théorème de d'Alembert-Gauss : tout polynôme non constant à coefficients complexes a au moins une racine complexe. Nous allons raisonner par l'absurde : soit $P = a_0 + \cdots + a_n X^n \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n \geqslant 1$ et supposons que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) \neq 0$.

Pour $(r,t) \in \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi]$ on pose

$$\varphi(r,t) = \frac{1}{P(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})} \text{ et } f(r) = \int_0^{2\pi} \varphi(r,t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Démontrer que, pour tout réel $A > 0$, il existe un réel $R > 0$ tel que, pour tout nombre complexe z de module supérieur ou égal à R, $|P(z)| \geqslant A$.

2. Calculer $\dfrac{\partial\varphi}{\partial r}$ et $\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}$.

3. Démontrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ et calculer f'.

4. Évaluer la limite de f en $+\infty$ et conclure.

1. Il s'agit ici de minorer le module de $P(z)$, qui est défini par une somme ; nous allons utiliser l'inégalité triangulaire. En effet, cette inégalité permet souvent de majorer une somme mais aussi, par un jeu d'écriture, de la minorer. La forme classique

$$|a+b| \leqslant |a| + |b|$$

donne une majoration de la somme $a+b$. Si l'on écrit $a = (a+b) - b$, on a également $|a| = |(a+b) - b| \leqslant |a+b| + |b|$, d'où l'on déduit une minoration de la somme. Nous allons l'appliquer avec $a = a_n z^n$ et $b = P(z) - a_n z^n$ pour minorer $|a+b| = |P(z)|$. En effet comme $|z|$ est grand, c'est le terme $a_n z^n$ qui sera le plus important.

Soit $z \in \mathbb{C}$. Isolons le terme de plus haut degré de P :

$$a_n z^n = P(z) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k.$$

D'après l'inégalité triangulaire

$$|a_n z^n| = \left| P(z) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k \right| \leqslant |P(z)| + \left| \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k \right|.$$

Nous avons ainsi la minoration

$$|P(z)| \geqslant |a_n z^n| - \left| \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k \right|$$

Pour conclure, nous devons obtenir une minoration de $|P(z)|$ à partir d'une minoration de $|z|$. L'expression précédente permet de le faire simplement. En effet, le module de la somme apparaissant dans le membre de droite peut être majoré par l'inégalité triangulaire en fonction de $|z|$. La présence du signe $-$ changera le sens de l'inégalité pour en faire une minoration de $|P(z)|$.

D'après l'inégalité triangulaire

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k \right| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| \; |z|^k$$

donc

$$|P(z)| \geqslant |a_n| \; |z|^n - \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| \; |z|^k.$$

Ce qui nous intéresse est $|z|$ et non z lui-même. Nous allons introduire une fonction d'une variable réelle qui pourra s'étudier aisément par les méthodes générales.

Considérons la fonction polynomiale réelle Q qui, à un réel x, associe

$$Q(x) = |a_n| \, x^n - \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| \, x^k.$$

L'inégalité précédente peut donc s'écrire :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad |P(z)| \geqslant Q(|z|).$$

Q est non constante (car $n \geqslant 1$) et son coefficient dominant est strictement positif. Ainsi, $Q(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. En particulier, étant donné un réel $A > 0$, il existe un réel $R > 0$ tel que, pour tout réel $x \geqslant R$, $Q(x) \geqslant A$.
Si z est un nombre complexe tel que $|z| \geqslant R$, on a donc $|P(z)| \geqslant Q(|z|) \geqslant A$.

2. Le calcul des dérivées partielles ne pose pas de difficulté particulière. En effet, les formules usuelles permettent de les calculer à partir des dérivées partielles de $(r,t) \mapsto P(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})$. Ces dérivées partielles se calculent à partir de celles des fonctions $(r,t) \mapsto r^k\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}$, avec k entier, dont $P(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})$ est combinaison linéaire.

Il faut faire attention au terme $k = 0$. En effet, sa dérivée est nulle, mais si on écrit $\dfrac{\partial}{\partial r}(r^k\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}) = k\,r^{k-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}$ cette expression n'est pas définie pour $k = 0$ et $r = 0$.

Pour $k \geqslant 1$, $r \in \mathbb{R}_+$ et $t \in [0, 2\pi]$, on a

$$\frac{\partial}{\partial r}(a_k r^k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}) = k\,a_k r^{k-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}(k\,a_k(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})^{k-1})$$

tandis que cette dérivée est nulle pour $k = 0$. On en déduit

$$\frac{\partial}{\partial r}(P(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}(k\,a_k(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})^{k-1}) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}P'(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}).$$

Enfin, d'après la formule de dérivation de l'inverse :

$$\frac{\partial\varphi(r,t)}{\partial r} = -\frac{\frac{\partial}{\partial r}(P(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}))}{P^2(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})} = -\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}P'(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}{P^2(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}.$$

Pour la dérivée partielle par rapport à t, les calculs sont similaires. Nous allons à nouveau faire apparaître le terme $k\,a_k(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})^{k-1}$ pour obtenir $P'(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})$ dans le résultat final.

Pour $k \geqslant 1$,

$$\frac{\partial}{\partial t}(a_k r^k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}) = \mathrm{i}k\,a_k r^k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt} = \mathrm{i}r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}k\,a_k(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})^{k-1}$$

d'où

$$\frac{\partial}{\partial t}(P(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{i}r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}k\,a_k(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})^{k-1} = \mathrm{i}r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}P'(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}).$$

Il vient enfin, d'après la formule de dérivation de l'inverse

$$\frac{\partial\varphi(r,t)}{\partial t} = -\frac{\mathrm{i}r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}P'(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}{P^2(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}.$$

On remarque une relation simple entre ces dérivées partielles : $\dfrac{\partial\varphi}{\partial t} = \mathrm{i}r\dfrac{\partial\varphi}{\partial r}$.

3. Il reste désormais à utiliser le théorème de dérivation des intégrales à paramètre. Certaines hypothèses de ce théorème sont faciles à vérifier, l'hypothèse de domination étant parfois plus technique.

Tout d'abord, pour tout $r \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \varphi(r,t)$ est intégrable sur $[0, 2\pi]$. En effet, cette fonction est continue sur $[0, 2\pi]$ car elle est obtenue par combinaisons linéaires, produits et quotients à partir de la fonction $t \mapsto r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ qui est continue. De plus, toute fonction continue sur un segment est intégrable.

Ensuite, pour $t \in [0, 2\pi]$, $r \mapsto \varphi(r,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et on a $t \mapsto \dfrac{\partial\varphi}{\partial r}(r,t)$ continue sur $[0, 2\pi]$ d'après la question précédente.

Il reste à vérifier l'hypothèse de domination, c'est-à-dire obtenir une inégalité de la forme

$$\left|\frac{\partial\varphi(r,t)}{\partial r}\right| \leqslant h(t)$$

valable pour tout $r \in \mathbb{R}_+$ et $t \in [0, 2\pi]$ avec h intégrable sur $[0, 2\pi]$.
Rappelons qu'il suffit d'avoir une domination locale (c'est-à-dire pour r dans un segment de $\mathbb{R}$) et que toute fonction constante est intégrable sur $[0, 2\pi]$.
On a obtenu précédemment :

$$\frac{\partial\varphi(r,t)}{\partial r} = -\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}P'(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}{P^2(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}.$$

Il n'est a priori pas évident de majorer ceci indépendamment de r. Cependant, si on se limite à des valeurs de r dans un segment S, la situation est plus simple. En effet, $S \times [0, 2\pi]$ est une partie compacte de $\mathbb{R}^2$ et toute fonction continue sur un compact est bornée ; comme $\dfrac{\partial\varphi}{\partial r}$ est continue sur $S \times [0, 2\pi]$, elle y est bornée et on obtient le résultat souhaité.

Enfin, fixons un segment $S \subset \mathbb{R}_+$. L'application $\dfrac{\partial\varphi}{\partial r}$ est continue sur $S \times [0, 2\pi]$ car elle est obtenue par combinaisons linéaires, produits et quotients à partir de la fonction $t \mapsto r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ qui est continue. De plus, $S \times [0, 2\pi]$ est compact. Ainsi, $\dfrac{\partial\varphi}{\partial r}$ est bornée sur $S \times [0, 2\pi]$, c'est-à-dire il existe un réel positif M tel que

$$\forall (r,t) \in S \times [0, 2\pi], \quad \left|\frac{\partial\varphi(r,t)}{\partial r}\right| \leqslant M.$$

La fonction $t \mapsto M$ est indépendante de r, intégrable sur le segment $[0, 2\pi]$ donc $\dfrac{\partial\varphi}{\partial r}$ vérifie l'hypothèse de domination sur tout segment inclus dans $\mathbb{R}_+$.
Ainsi, la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$; et on a

$$\forall r \in \mathbb{R}_+, \quad f'(r) = \int_0^{2\pi} \frac{\partial\varphi(r,t)}{\partial r}\,\mathrm{d}t.$$

Cette intégrale n'est pas, a priori, aisée à calculer : on intègre par rapport à t une dérivée partielle par rapport à r. Cependant, les questions précédentes donnent une relation entre les dérivées partielles de φ.

Les calculs précédents montrent que
$$\forall (r,t) \in \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi], \qquad \frac{\partial \varphi(r,t)}{\partial t} = \mathrm{i} r \frac{\partial \varphi(r,t)}{\partial r}.$$
Ainsi, pour $r > 0$, on a
$$f'(r) = \frac{1}{\mathrm{i}r} \int_0^{2\pi} \frac{\partial \varphi(r,t)}{\partial t}\,\mathrm{d}t,$$
d'où
$$f'(r) = \frac{1}{\mathrm{i}r} \Big[\varphi(r,t)\Big]_{t=0}^{t=2\pi} = 0.$$

Étant donné qu'il y a deux variables, il est préférable de préciser par rapport à quelle variable est calculé le crochet en écrivant $t = 0$ et $t = 2\pi$ plutôt que simplement 0 et 2π.

La division par r oblige à supposer $r \neq 0$. Cependant, f étant de classe $\mathscr{C}^1$, on peut en déduire la valeur de $f'(0)$ par passage à la limite.

f' est donc nulle sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, f' est continue sur $\mathbb{R}_+$ donc f' est en fait identiquement nulle sur $\mathbb{R}_+$.

4. Quand r est grand, $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ est aussi grand car son module est r, donc, d'après la première question, $P(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})$ est grand et l'intégrale de son inverse, c'est-à-dire $f(r)$, petite. On s'attend donc à ce que f tende vers 0 en $+\infty$.
Fixons un réel $\varepsilon > 0$. Nous souhaitons majorer $|f|$ à l'aide de ε donc nous pouvons chercher à minorer $|P(z)|$ à l'aide de $\frac{1}{\varepsilon}$. Pour cela, on peut utiliser la première question avec $A = \frac{1}{\varepsilon}$.

Soit un réel $\varepsilon > 0$. D'après la première question appliquée à $A = \dfrac{1}{\varepsilon}$ il existe un réel $R > 0$ tel que, pour tout complexe z tel que $|z| \geqslant R$, $|P(z)| \geqslant \dfrac{1}{\varepsilon}$.
En particulier pour tout réel $r \geqslant R$ et tout réel t, on a $\left|r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right| = r \geqslant R$ et donc $\left|P(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\right| \geqslant \dfrac{1}{\varepsilon}$ soit enfin $\dfrac{1}{|P(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})|} \leqslant \varepsilon$.
Cette inégalité étant vraie pour tout réel t on obtient, en intégrant de 0 à 2π :
$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{|P(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})|}\,\mathrm{d}t \leqslant 2\pi\varepsilon$$

et donc
$$|f(r)| = \left| \int_0^{2\pi} \frac{1}{P(re^{it})} \, dt \right| \leqslant \int_0^{2\pi} \frac{1}{|P(re^{it})|} \, dt \leqslant 2\pi\varepsilon.$$
En résumé : pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $R > 0$ tel que, pour tout réel $r \geqslant R$, on a $|f(r)| \leqslant 2\pi\varepsilon$.
Autrement dit, par définition de la limite, $f(r) \underset{r \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

Par ailleurs $f' = 0$ donc f est constante : ainsi, $f = 0$. Il reste à voir en quoi ceci constitue une contradiction.
Nous venons d'étudier f au voisinage de $+\infty$. La situation en 0 est facile à étudier car $f(0)$ peut se calculer simplement.

Par ailleurs, nous avons vu précédemment que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et que sa dérivée est identiquement nulle ; ainsi f est constante sur $\mathbb{R}_+$.
Comme f tend vers 0 en $+\infty$ et est constante on en déduit qu'elle est identiquement nulle. Cependant
$$f(0) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{P(0)} \, dt = \frac{2\pi}{P(0)} \neq 0$$
ce qui constitue une contradiction manifeste avec le point précédent.
Ainsi notre hypothèse de départ, à savoir que P ne possédait aucune racine complexe, est fausse.
Nous avons donc démontré que tout polynôme non constant à coefficients complexes possède au moins une racine complexe.

CHAPITRE

12

Équations différentielles

Exercice 12.1 : Variation des constantes

Résoudre sur $I =]-1, +\infty[$ l'équation différentielle :

$$(E) \qquad y'' - 2y' + y = \frac{2\mathrm{e}^x}{(x+1)^3}.$$

L'équation donnée signifie, plus rigoureusement

$$\forall x \in I, \quad y''(x) - 2y'(x) + y(x) = \frac{2\mathrm{e}^x}{(x+1)^3}$$

mais les équations différentielles seront toujours données sous la forme de l'énoncé.

C'est une équation différentielle linéaire du second ordre. On commence donc par résoudre l'équation homogène associée. Comme les coefficients sont constants, on va considérer l'équation caractéristique (méthode de première année).

Comme les coefficients de l'équation homogène sont constants, considérons l'équation caractéristique :

$$r^2 - 2r + 1 = 0 = (r-1)^2.$$

Elle admet 1 comme racine double. La solution générale de l'équation homogène s'écrit donc :

$$y : x \mapsto (\lambda x + \mu)\,\mathrm{e}^x \qquad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

Pour résoudre l'équation (E), on peut utiliser la méthode de variation des constantes.

On cherche une solution particulière de (E) sous la forme

$$y : x \mapsto \lambda(x) x\mathrm{e}^x + \mu(x)\mathrm{e}^x$$

avec λ et μ deux fonctions dérivables deux fois sur I, vérifiant la condition

$$\forall x \in I, \quad \lambda'(x) x\mathrm{e}^x + \mu'(x)\mathrm{e}^x.$$

Pour $x \in I$, on calcule alors

$$\begin{aligned} y'(x) &= \lambda'(x)x\mathrm{e}^x + \lambda(x)(\mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x) + \mu'(x)\mathrm{e}^x + \mu(x)\mathrm{e}^x \\ &= \lambda(x)(\mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x) + \mu(x)\mathrm{e}^x \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} y''(x) &= \lambda'(x)(\mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x) + \lambda(x)(2\mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x) + \mu'(x)\mathrm{e}^x + \mu(x)\mathrm{e}^x \\ &= \lambda(x)(2\mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x) + \mu(x)\mathrm{e}^x + \lambda'(x)\mathrm{e}^x \end{aligned}$$

En reportant dans (E), il vient

$$\begin{aligned} \frac{2\mathrm{e}^x}{(x+1)^3} &= y''(x) - 2y'(x) + y(x) \\ &= \lambda(x)(2\mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x) + \mu(x)\mathrm{e}^x + \lambda'(x)\mathrm{e}^x \\ &\quad - 2\lambda(x)(\mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x) - 2\mu(x)\mathrm{e}^x + \lambda(x)x\mathrm{e}^x + \mu(x)\mathrm{e}^x \\ &= \lambda'(x)\mathrm{e}^x \end{aligned}$$

Ainsi $\lambda'(x) = \dfrac{2}{(x+1)^3}$ et $\mu'(x) = -x\lambda'(x) = -\dfrac{2x}{(x+1)^3}$. Une primitive de λ' se calcule facilement. Pour celle de μ', on constate que

$$\mu'(x) = -\frac{2x}{(x+1)^3} = \frac{2}{(x+1)^3} - \frac{2x}{(x+1)^2}.$$

On peut donc choisir

$$\lambda : x \mapsto -\frac{1}{(x+1)^2} \quad \text{et} \quad \mu : x \mapsto -\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{2}{x+1} = \frac{2x+1}{(x+1)^2}.$$

Une solution particulière de (E) est donc

$$x \mapsto \lambda(x)x\mathrm{e}^x + \mu(x)\mathrm{e}^x = \left(\frac{-x}{(x+1)^2} + \frac{2x+1}{(x+1)^2}\right)\mathrm{e}^x = \frac{\mathrm{e}^x}{x+1}$$

et la solution générale de (E) est

$$x \mapsto \left(\frac{1}{x+1} + \lambda x + \mu\right)\mathrm{e}^x, \qquad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

Exercice 12.2 : Utilisation d'un changement de fonction

1. Résoudre l'équation différentielle :

$$(E) \qquad (1+x)\,y'' - 2y' + (1-x)\,y = x\,\mathrm{e}^{-2x}$$

sur un intervalle ne contenant pas $x = -1$.
On pourra poser $y(x) = u(x)\,\mathrm{e}^x$.
2. Étudier le prolongement éventuel à $\mathbb{R}$.

1. On effectue le changement de fonction proposé par l'énoncé. En dérivant deux fois la relation proposée et en reportant dans l'équation, on espère trouver une équation plus simple.

Si y est une solution de (E) sur l'intervalle $I =]-\infty, -1[$ ou $]-1, +\infty[$, on pose $u : x \mapsto \mathrm{e}^{-x} y(x)$. u est deux fois dérivable comme produit de fonctions qui le sont, et pour $x \in I$, on a $y(x) = u(x)\mathrm{e}^x$. En dérivant, on obtient :

$$\begin{aligned} y'(x) &= u'(x)\mathrm{e}^x + u(x)\mathrm{e}^x \\ y''(x) &= u''(x)\mathrm{e}^x + 2u'(x)\mathrm{e}^x + u(x)\mathrm{e}^x. \end{aligned}$$

En reportant dans (E), on obtient alors

$$\begin{aligned} x\mathrm{e}^{-2x} &= (1+x)(u''(x)\mathrm{e}^x + 2u'(x)\mathrm{e}^x + u(x)\mathrm{e}^x) - 2(u'(x)\mathrm{e}^x + u(x)\mathrm{e}^x) \\ &\quad + (1-x)u(x)\mathrm{e}^x \\ &= ((1+x)u''(x) + 2xu'(x))\mathrm{e}^x \end{aligned}$$

L'équation différentielle (E') que nous venons d'obtenir est linéaire d'ordre 1 par rapport à la fonction $u'(x)$ et à coefficients continus. Pour la résoudre on va avoir besoin d'une primitive de

$$x \mapsto -\frac{2x}{1+x} = -2\frac{(x+1)-1}{1+x} = -2 + \frac{2}{1+x}$$

qui est $x \mapsto -2x + 2\ln(|x+1|)$.

Comme on ne sait pas si $x+1$ est > 0 ou < 0 (puisqu'on fait le même raisonnement que I soit $]-\infty, -1[$ ou $]-1, +\infty[$), il faut prendre $x \mapsto \ln(|x+1|)$ comme primitive de $x \mapsto \frac{1}{x+1}$.

Sur I, la solution générale de l'équation homogène associée à (E') est :

$$x \mapsto \lambda \exp\left(-2x + 2\ln|x+1|\right) = \lambda(x+1)^2\mathrm{e}^{-2x}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

On utilise ensuite la méthode de variation de la constante en cherchant une solution particulière de la forme $x \mapsto \lambda(x)\,(x+1)^2\mathrm{e}^{-2x}$, avec λ dérivable sur I. En reportant dans (E'), on trouve :

$$\lambda'(x)(x+1)^3\mathrm{e}^{-2x} = x\mathrm{e}^{-2x} \quad \text{i.e.} \quad \lambda'(x) = \frac{x}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+1)^3}.$$

On peut donc prendre $\lambda : x \mapsto -\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{2(x+1)^2}$, ce qui donne comme solution particulière :

$$y_P : x \mapsto \lambda(x)(x+1)^2\mathrm{e}^{-2x} = \left(-x - 1 + \frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-2x} = -\left(x + \frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-2x}.$$

On en déduit que u' est de la forme

$$u' : x \mapsto \lambda(x+1)^2\mathrm{e}^{-2x} - \left(x + \frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-2x}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Par un calcul de primitives, qui se fait avec deux intégrations par parties (non détaillé ici), on en déduit que u est de la forme

$$u : x \mapsto -\frac{\lambda}{2}\mathrm{e}^{-2x}\left(x^2+3x+\frac{5}{2}\right)+\mu+\frac{x+1}{2}\mathrm{e}^{-2x}, \qquad (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2.$$

La solution générale de (E) sur un intervalle ne contenant pas -1 est donc de la forme :

$$y : x \mapsto -\frac{\lambda}{2}\mathrm{e}^{-x}\left(x^2+3x+\frac{5}{2}\right)+\mu\mathrm{e}^{x}+\frac{x+1}{2}\mathrm{e}^{-x}, \qquad (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2.$$

Il ne faut pas oublier la constante d'intégration (ici μ) lorsqu'on intègre la fonction u'.

2. Une solution sur $\mathbb{R}$ doit, en particulier, être de la forme précédente sur chacun des deux intervalles $]-\infty,-1[$ et $]-1,+\infty[$. Il reste à déterminer les conditions de raccordement sur les constantes.

D'après la question précédente, il existe des constantes λ_1, μ_1, λ_2, μ_2 telles que :

$$\forall x\in\,]-\infty,-1[,\quad y(x) = -\frac{\lambda_1}{2}\,\mathrm{e}^{-x}\left(x^2+3x+\frac{5}{2}\right)+\mu_1\,\mathrm{e}^{x}+\frac{x+1}{2}\,\mathrm{e}^{-x}$$

$$\forall x\in\,]-1,+\infty[,\quad y(x) = -\frac{\lambda_2}{2}\,\mathrm{e}^{-x}\left(x^2+3x+\frac{5}{2}\right)+\mu_2\,\mathrm{e}^{x}+\frac{x+1}{2}\,\mathrm{e}^{-x}$$

Le prolongement éventuel d'une solution de l'équation différentielle

- doit être continu en $x=-1$, c'est-à-dire que $\lim\limits_{x\to(-1)^-} y(x) = \lim\limits_{x\to(-1)^+} y(x)$, ce qui donne la condition :
$$-\frac{\lambda_1}{4}\,\mathrm{e}^{1}+\mu_1\,\mathrm{e}^{-1} = -\frac{\lambda_2}{4}\,\mathrm{e}^{1}+\mu_2\,\mathrm{e}^{-1};$$
- doit être deux fois dérivable en $x=-1$, ce qui est assuré par les conditions suffisantes
$$\lim_{x\to(-1)^-} y'(x) = \lim_{x\to(-1)^+} y'(x)$$
$$\lim_{x\to(-1)^-} y''(x) = \lim_{x\to(-1)^+} y''(x)$$
qui donnent (après calculs non détaillés ici) la même condition que la continuité.

Il ne faut pas oublier de vérifier que le prolongement obtenu est au moins deux fois dérivable, donc les conditions sur y' et y''.

Il ne reste donc qu'une égalité à vérifier par les quatre constantes. Les solutions prolongeables sur $\mathbb{R}$ sont donc les fonctions définies par :

$$\forall x \in]-\infty,-1[, \quad y(x) = -\frac{\lambda_1}{2}\,\mathrm{e}^{-x}\left(x^2+3x+\frac{5}{2}\right)+\mu_1\,\mathrm{e}^{x}+\frac{x+1}{2}\,\mathrm{e}^{-x}$$
$$\forall x \in]-1,+\infty[, \quad y(x) = -\frac{\lambda_2}{2}\,\mathrm{e}^{-x}\left(x^2+3x+\frac{5}{2}\right)+\mu_2\,\mathrm{e}^{x}+\frac{x+1}{2}\,\mathrm{e}^{-x}$$

où λ_1, μ_1, λ_2, μ_2 sont des réels tels que

$$-\frac{\lambda_1}{4}\,\mathrm{e}^{1}+\mu_1\,\mathrm{e}^{-1} = -\frac{\lambda_2}{4}\,\mathrm{e}^{1}+\mu_2\,\mathrm{e}^{-1}.$$

Exercice 12.3 : Utilisation d'un changement de variable

On considère l'équation différentielle sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$(E) \qquad x^2y''+y=0.$$

En posant le changement de variable $x=\mathrm{e}^u$, résoudre (E).

Pour utiliser le changement de variable proposé en indication, il faut poser la fonction $z(u)=y(\mathrm{e}^u)$. Cette relation revient à $y(x)=z(\ln(x))$. On dérive deux fois et on reporte dans (E) pour obtenir une nouvelle équation sur z.

Le fait de changer la variable change toutes les dérivées (via la formule des dérivées composées). On ne peut donc pas changer x dans (E) directement.

Posons $z : u \mapsto y(\mathrm{e}^u)$, dérivable deux fois puisque y l'est. Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $y(x)=z(\ln(x))$, donc :

$$y'(x) = \frac{1}{x}z'(\ln(x))$$
$$y''(x) = -\frac{1}{x^2}z'(\ln(x))+\frac{1}{x^2}z''(\ln(x))$$

En reportant dans (E), on obtient alors :

$$z''(\ln(x))-z'(\ln(x))+z(\ln(x))=0$$

puis z est solution de $z''-z'+z=0$.

Il n'y a alors plus aucune difficulté : il s'agit de résoudre une équation différentielle linéaire homogène du second ordre à coefficients constants, ce qui peut se faire en cherchant les racines de l'équation caractéristique.
Il restera ensuite à revenir à la variable initiale, c'est-à-dire remplacer u par $\ln(x)$ dans le résultat.

L'équation caractéristique est $r^2 - r + 1 = 0$.
Elle possède deux racines complexes conjuguées distinctes $\dfrac{1}{2} \pm \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
On en déduit que z est de la forme

$$z : u \mapsto \mathrm{e}^{u/2}\left[\lambda \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}u\right) + \mu \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}u\right)\right], \qquad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

soit, en revenant à la variable initiale grâce à la relation $y(x) = z(\ln x)$,

$$y : x \mapsto \sqrt{x}\left[\lambda \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)\right) + \mu \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)\right)\right], \qquad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

Exercice 12.4 : Utilisation de séries entières (cas régulier)

En utilisant les séries entières, résoudre l'équation différentielle :

$$(1 - x^2)\, y'' - 6\, x\, y' - 4\, y = 0.$$

sur $]-1, 1[$. On exprimera la solution générale à l'aide de fonctions usuelles.

On suit l'indication de l'énoncé en cherchant une solution développable en série entière.

Cherchons une solution sous la forme $y : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$, en supposant que cette série entière a un rayon de convergence $R > 0$. On peut alors dériver terme à terme sur $]-R, R[$ et pour $x \in]-R, R[$,

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n\, x^{n-1} \quad \text{et} \quad y''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n\,(n-1)\, a_n\, x^{n-2}.$$

En reportant dans l'équation différentielle, on obtient :

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{n=2}^{+\infty} n\,(n-1)\, a_n\, x^{n-2} - \sum_{n=2}^{+\infty} n\,(n-1)\, a_n\, x^n - 6 \sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n\, x^n - 4 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)\,(n+1)\, a_{n+2}\, x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} n\,(n-1)\, a_n\, x^n \\
&\quad - 6 \sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n\, x^n - 4 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left[(n+2)\,(n+1)\, a_{n+2} - (n+1)\,(n+4)\, a_n\right] x^n.
\end{aligned}$$

La série précédente a pour somme la fonction nulle si, et seulement si, tous ses coefficients sont nuls. Il en résulte :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = \frac{n+4}{n+2}\, a_n$$

avec a_0 et a_1 quelconques.
La relation de récurrence est d'ordre 2, en l'itérant un certain nombre de fois, on tombera sur a_0 si n est pair, a_1 si n est impair.
On sépare donc le calcul de a_{2p} et de a_{2p+1} :

$$\begin{aligned} a_{2p} &= \frac{2p+2}{2p}\, a_{2p-2} = \frac{2p+2}{2p} \times \frac{2p}{2p-2}\, a_{2p-4} \\ &= \cdots = \frac{(2p+2) \times \cdots \times 4}{(2p) \times \cdots \times 2}\, a_0 = (p+1)\, a_0 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} a_{2p+1} &= \frac{2p+3}{2p+1}\, a_{2p-1} = \frac{2p+3}{2p+1} \times \frac{2p+1}{2p-1}\, a_{2p-3} \\ &= \cdots = \frac{(2p+3) \times \cdots \times 5}{(2p+1) \times \cdots \times 3}\, a_1 = \frac{2p+3}{3}\, a_1 \end{aligned}$$

d'où la forme de y

$$y(x) = a_0 \sum_{p=0}^{+\infty} (p+1) x^{2p} + \frac{a_1}{3} \sum_{p=0}^{+\infty} (2p+3)\, x^{2p+1}.$$

Le rayon de convergence de chacune des séries entières est égal à 1 puisque pour $r \in \mathbb{R}_+^*$

$$\left| \frac{a_{n+2}\, r^{n+2}}{a_n\, r^n} \right| = \left| \frac{n+4}{n+2} \right| r^2 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} r^2$$

et par le critère de d'Alembert, chacune des séries converge si $r < 1$ et diverge si $r > 1$.
Le rayon de convergence R de la série représentant $y(x)$ vérifie donc $R \geqslant 1$.

Il ne faut pas oublier de vérifier que le rayon de convergence obtenu finalement est > 0, sinon les calculs effectués plus haut ne sont pas justifiés.

Comme l'ensemble des solutions obtenues dépend de deux constantes réelles, c'est un espace vectoriel de dimension 2 : on a ainsi toutes les solutions puisque les deux séries entières ne sont pas proportionnelles.
Pour exprimer y à l'aide de fonctions usuelles, écrivons successivement :

$$\begin{aligned} u(x) &= \sum_{p=0}^{+\infty} (p+1) x^p = \left(\sum_{p=0}^{+\infty} x^{p+1} \right)' = \left(\frac{x}{1-x} \right)' \\ &= \frac{(1-x) - (-x)}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

donc

$$\sum_{p=0}^{+\infty} (p+1) x^{2p} = u(x^2) = \frac{1}{(1-x^2)^2}$$

et

$$\sum_{p=0}^{+\infty}(2p+3)x^{2p+1} = 2xu(x^2) + \sum_{p=0}^{+\infty} x^{2p+1} = \frac{2x}{(1-x^2)^2} + \frac{x}{1-x^2}$$
$$= \frac{x\,(3-x^2)}{(1-x^2)^2}.$$

La solution générale dans l'intervalle $]-1,1[$ est donc :

$$y : x \mapsto \frac{\lambda + \mu x\,(3-x^2)}{(1-x^2)^2}, \qquad (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2.$$

La notation $\left(\frac{x}{1-x}\right)'$ est abusive, mais bien pratique pour les calculs.

Exercice 12.5 : Utilisation de séries entières (cas singulier)

On considère l'équation différentielle :

$$(E) \qquad x\,y'' + 2\,y' + 4\,x\,y = 0.$$

1. Déterminer une solution φ de (E) non nulle développable en série entière.
2. En posant $y(x) = \varphi(x)u(x)$, résoudre (E) sur un intervalle que l'on choisira.

1. On suit l'indication en cherchant une solution de (E) développable en série entière.

Cherchons une solution sous la forme $y : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$, en supposant que cette série entière a un rayon de convergence $R > 0$. On peut alors dériver terme à terme sur $]-R,R[$ et pour $x \in]-R,R[$,

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\,a_n\,x^{n-1} \quad \text{et} \quad y''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n\,(n-1)\,a_n\,x^{n-2}.$$

En reportant dans l'équation différentielle, on obtient :

$$0 = \sum_{n=2}^{+\infty} n\,(n-1)\,a_n\,x^{n-1} + 2\sum_{n=1}^{+\infty} n\,a_n\,x^{n-1} + 4\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,x^{n+1}$$
$$= \sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)\,n\,a_{n+1}\,x^n + 2\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\,a_{n+1}\,x^n + 4\sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1}\,x^n$$
$$= 2a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[(n+2)\,(n+1)\,a_{n+1} + 4\,a_{n-1}\right]x^n.$$

La série entière précédente a pour somme la fonction nulle si, et seulement si, tous ses coefficients sont nuls. Ceci équivaut à :

$$a_1 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 2, \quad a_n = \frac{-4}{(n+1)n}\, a_{n-2}.$$

Comme $a_1 = 0$, on montre par récurrence aisée que tous les a_{2p+1} sont nuls. Pour $p \in \mathbb{N}$, on a

$$a_{2p} = \frac{-4}{(2p+1)\,(2p)} a_{2p-2} = \cdots = \frac{(-1)^p\, 4^p}{(2p+1)!}\, a_0.$$

Les solutions de (E) développables en séries entières peuvent donc s'écrire :

$$\begin{aligned} y(x) &= a_0 \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p\, 4^p}{(2p+1)!}\, x^{2p} = \frac{a_0}{2x} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!}\, (2x)^{2p+1} \\ &= a_0\, \frac{\sin(2\,x)}{2\,x} \end{aligned}$$

et la série écrite a un rayon de convergence infini, ce qui justifie a posteriori la possibilité de dériver.

On choisit $\varphi(x) = \dfrac{\sin(2x)}{2x}$ (prolongée par continuité avec $\varphi(0) = 1$) pour la question suivante.

2. On doit ensuite faire le changement de fonction $y(x) = u(x)\frac{\sin(2x)}{x}$. On doit donc dériver deux fois cette relation, puis reporter dans (E) pour obtenir une équation plus simple.

Si y est solution de (E), on pose $u : x \mapsto \dfrac{y(x)}{\varphi(x)}$. Ceci nécessite de se placer sur un intervalle où φ ne s'annule pas. On choisit $J = \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

u est alors deux fois dérivable sur J comme quotient de fonctions qui le sont, et pour $x \in J$, $y(x) = u(x)\varphi(x)$. En dérivant, on obtient

$$\begin{aligned} y'(x) &= u'(x)\varphi(x) + u(x)\varphi'(x) \\ y''(x) &= u''(x)\varphi(x) + 2u'(x)\varphi'(x) + u(x)\varphi''(x) \end{aligned}$$

En reportant dans (E), comme φ est solution, il vient

$$\begin{aligned} 0 &= x(u''(x)\varphi(x) + 2u'(x)\varphi'(x) + u(x)\varphi''(x)) + 2(u'(x)\varphi(x) + u(x)\varphi'(x)) \\ &\quad + 4xu(x)\varphi(x) \\ &= u''(x)x\varphi(x) + u'(x)(2x\varphi'(x) + 2\varphi(x)) \\ &\quad + u(x)(x\varphi''(x) + 2\varphi'(x) + 4x\varphi(x)) \\ &= u''(x)\frac{\sin(2x)}{2} + u'(x)\left(2x\,\frac{2x\cos(2x) - \sin(2x)}{2x^2} + 2\frac{\sin(2x)}{2x}\right) \\ &= \frac{1}{2}(\sin(2x)u''(x) + 4\cos(2x)u'(x)) \end{aligned}$$

Il est plus astucieux de ne remplacer φ par son expression que lorsque l'on a effectué les simplifications dans l'équation différentielle.

Par suite u satisfait l'équation (E') sur J

$$(E') \quad \sin(2x)u'' + 4\cos(2x)u' = 0.$$

L'équation différentielle que nous venons d'obtenir est linéaire d'ordre 1 par rapport à la fonction u'. Sa solution générale est

$$u' : x \mapsto \lambda \exp(-2\ln|\sin(2x)|) = \frac{\lambda}{\sin^2(2x)}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Par un calcul de primitives, on en déduit que u est de la forme

$$u : x \mapsto \frac{\lambda}{2}\frac{\cos(2x)}{\sin(2x)} + \mu, \qquad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Il est nécessaire de se placer sur un intervalle où la fonction $x \mapsto \sin(2x)$ ne s'annule pas, sinon l'équation n'est pas résolue.

La solution générale de (E) sur J est donc :

$$y : x \mapsto u(x)\frac{\sin(2x)}{x} = \frac{\lambda\cos(2x) + \mu\sin(2x)}{x}, \qquad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

En fait la solution générale obtenue convient même sur $I = \mathbb{R}_+^*$.

Exercice 12.6 : Système différentiel d'ordre 2 (A diagonalisable)

Résoudre le système différentiel :

$$(S) \qquad \begin{cases} x' = 5x - 2y + \mathrm{e}^t \\ y' = -x + 6y + t \end{cases}$$

Il s'agit d'un système différentiel d'ordre 1 à coefficients constants. On va donner deux méthodes pour sa résolution.

Le système (S) a pour écriture matricielle $X'(t) = AX(t) + B(t)$ avec :

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t \\ t \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique de A est $X^2 - 11X + 28$. Ses valeurs propres sont donc $\lambda_1 = 4$ et $\lambda_2 = 7$. Elles sont distinctes, donc A est diagonalisable.

Les sous-espaces propres associés sont respectivement engendrés par $V_1 = (2,1)$ et $V_2 = (1,-1)$ (calcul simple non détaillé ici). La solution générale du système homogène associé est :

$$X : t \mapsto \lambda \mathrm{e}^{4t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \mathrm{e}^{7t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

▶ Méthode 1 : Variation des constantes

Par la méthode de variation des constantes, on cherche une solution particulière sous la forme

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = u(t)\mathrm{e}^{4t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + v(t)\mathrm{e}^{7t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

avec u et v deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. En reportant dans le système (S), on obtient alors

$$u'(t)\mathrm{e}^{4t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + v'(t)\mathrm{e}^{7t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t \\ t \end{pmatrix}$$

ce qui donne le système linéaire en $u'(t)$ et $v'(t)$ dont la résolution est immédiate :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2\mathrm{e}^{4t}u'(t) + \mathrm{e}^{7t}v'(t) & = & \mathrm{e}^t \\ \mathrm{e}^{4t}u'(t) - \mathrm{e}^{7t}v'(t) & = & t \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} u'(t) & = & \frac{1}{3}\,\mathrm{e}^{-3t} + \frac{1}{3}\,t\,\mathrm{e}^{-4t} \\ v'(t) & = & \frac{1}{3}\,\mathrm{e}^{-6t} - \frac{2}{3}\,t\,\mathrm{e}^{-7t} \end{array} \right.$$

En effectuant une intégration par parties, on obtient les primitives

$$u : t \mapsto -\frac{1}{9}\,\mathrm{e}^{-3t} - \frac{1}{12}\,t\,\mathrm{e}^{-4t} - \frac{1}{48}\,\mathrm{e}^{-4t}$$
$$v : t \mapsto -\frac{1}{18}\,\mathrm{e}^{-6t} + \frac{2}{21}\,t\,\mathrm{e}^{-7t} + \frac{2}{147}\,\mathrm{e}^{-7t}$$

donc une solution particulière est

$$t \mapsto u(t)\mathrm{e}^{4t} \begin{pmatrix} 2 \\ \\ 1 \end{pmatrix} + v(t)\mathrm{e}^{7t} \begin{pmatrix} 1 \\ \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{5}{18}\mathrm{e}^t - \dfrac{t}{14} - \dfrac{11}{392} \\ -\dfrac{1}{18}\mathrm{e}^t - \dfrac{5t}{28} - \dfrac{27}{784} \end{pmatrix}$$

puis en reportant, et en simplifiant, la solution générale de (S) est

$$x : t \mapsto 2\lambda\,\mathrm{e}^{4t} + \mu\,\mathrm{e}^{7t} - \frac{5}{18}\,\mathrm{e}^t - \frac{1}{14}\,t - \frac{11}{392}$$
$$y : t \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{4t} - \mu\,\mathrm{e}^{7t} - \frac{1}{18}\,\mathrm{e}^t - \frac{5}{28}\,t - \frac{27}{784}$$

où λ et μ sont des constantes réelles quelconques.

Il ne faut pas oublier de reporter l'expression de u et v obtenue dans x et y.

▶ Méthode 2 : Diagonalisation de A

Diagonalisons A dans la base des vecteurs propres déjà écrits.
On a $A = PDP^{-1}$ avec :

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \qquad P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Le système (S) peut alors s'écrire :

$$X'(t) = PDP^{-1}X(t) + B(t)$$

c'est-à-dire, en multipliant à gauche par P^{-1} et en posant $U(t) = P^{-1}X(t)$:

$$U'(t) = DU(t) + P^{-1}B(t)$$

Comme $P^{-1}B(t) = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} e^t + t \\ e^t - 2t \end{pmatrix}$, en notant $U(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$, on est conduit au système :

$$\begin{cases} u'(t) &= & 4u(t) + \frac{1}{3}\left(e^t + t\right) \\ v'(t) &= & 7v(t) + \frac{1}{3}\left(e^t - 2t\right) \end{cases}$$

Il s'agit de deux équations différentielles linéaires du premier ordre, dont la résolution donne :

$$u : t \mapsto \lambda\, e^{4t} - \frac{1}{9}\, e^t - \frac{1}{12}\left(t + \frac{1}{4}\right)$$

$$v : t \mapsto \mu\, e^{7t} - \frac{1}{18}\, e^t + \frac{2}{21}\left(t + \frac{1}{7}\right)$$

On en déduit la solution générale de (S) avec $X(t) = PU(t)$:

$$x : t \mapsto 2\lambda\, e^{4t} + \mu\, e^{7t} - \frac{5}{18}\, e^t - \frac{1}{14}\, t - \frac{11}{392}$$

$$y : t \mapsto \lambda\, e^{4t} - \mu\, e^{7t} - \frac{1}{18}\, e^t - \frac{5}{28}\, t - \frac{27}{784}$$

où λ et μ sont des constantes réelles quelconques.

Exercice 12.7 : Système différentiel d'ordre 3 (A trigonalisable)

Résoudre le système différentiel :

$$(S) \qquad \begin{cases} 5x' = -x - 3y + 11z \\ 5y' = -10x + 5y + 10z \\ 5z' = 9x + 7y + z \end{cases}$$

Il s'agit d'un système linéaire à coefficients constants, de matrice A.
Si la matrice A est diagonalisable, la solution générale de (S) est donnée par une formule du cours qui utilise les valeurs propres et les vecteurs propres de A.
Si A n'est pas diagonalisable, avec comme valeurs propres λ_1 d'ordre 2 et λ_2 d'ordre 1, on cherche à trigonaliser A, en utilisant la décomposition de E par le lemme des noyaux.

On $A = \mathrm{Ker}((A - \lambda_1 \mathrm{I}_3)^2) \oplus \mathrm{Ker}(A - \lambda_2 \mathrm{I}_3)$ par le lemme des noyaux et le théorème de Cayley-Hamilton. Dans une base adaptée à cette décomposition, la matrice de A est de la forme :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & * & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

(S) s'écrit $X' = AX$ avec

$$A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & -3 & 11 \\ -10 & 5 & 10 \\ 9 & 7 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

▶ **Recherche des valeurs propres de A**

Le polynôme caractéristique de A s'écrit :

$$\begin{aligned}
\det(A - \lambda I_3) &= \frac{1}{5^3}\begin{vmatrix} -1-5\lambda & -3 & 11 \\ -10 & 5-5\lambda & 10 \\ 9 & 7 & 1-5\lambda \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{125}\begin{vmatrix} -1-5\lambda & -3 & 10-5\lambda \\ -10 & 5-5\lambda & 0 \\ 9 & 7 & 10-5\lambda \end{vmatrix} \qquad C_3 \longleftarrow C_3 + C_1 \\
&= \frac{1}{25}(2-\lambda)\begin{vmatrix} -1-5\lambda & -3 & 1 \\ -10 & 5-5\lambda & 0 \\ 9 & 7 & 1 \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{25}(2-\lambda)\begin{vmatrix} -10-5\lambda & -10 & 0 \\ -10 & 5-5\lambda & 0 \\ 9 & 7 & 1 \end{vmatrix} \qquad L_1 \longleftarrow L_1 - L_3 \\
&= (2-\lambda)((-2-\lambda)(1-\lambda) - 4) \\
&= -(\lambda - 2)(\lambda^2 + \lambda - 6) = -(\lambda-2)^2\,(\lambda+3).
\end{aligned}$$

Les valeurs propres de A sont donc : 2 (double), -3 (simple).

On vérifie que la somme des valeurs propres comptées avec multiplicité est égale à la trace de A, ceci permet de détecter une erreur de calcul.

▶ **Recherche de l'espace propre associé à 2**

Le sous-espace propre E_2 est l'ensemble des vecteurs (a, b, c) dont les composantes vérifient le système :

$$\begin{cases} -a - 3b + 11c = 10a \\ -10a + 5b + 10c = 10b \\ 9a + 7b + c = 10c \end{cases}$$

qui équivaut à $b = 0$ et $c = a$. E_2 est donc la droite vectorielle qui admet pour base $V_1 = (1, 0, 1)$ et A n'est pas diagonalisable.

▶ **Recherche de V_2**

Pour obtenir la forme voulue pour la matrice semblable à A, il faut choisir V_2 tel que $f(V_2) = V_1 + 2V_2$ (en prenant $* = 1$ par exemple). Les composantes (a, b, c) de V_2 vérifient donc le système :

$$\begin{cases} -a - 3b + 11c = 5 + 10a \\ -10a + 5b + 10c = 10b \\ 9a + 7b + c = 5 + 10c \end{cases}$$

qui donne $b = 2$ et $c = a + 1$. On peut donc choisir $V_2 = (0, 2, 1)$.

Plutôt que de chercher à déterminer l'espace caractéristique (qui est $\mathrm{Ker}((A - 2\mathrm{I}_3)^2)$), il est plus simple de chercher le vecteur comme ci-dessus.

▶ **Recherche de l'espace propre associé à -3**

Le sous-espace propre E_{-3} est l'ensemble des vecteurs (a, b, c) dont les composantes vérifient le système :

$$\begin{cases} -a - 3b + 11c = -15a \\ -10a + 5b + 10c = -15b \\ 9a + 7b + c = -15c \end{cases}$$

qui équivaut à $a = b$ et $c = -a$. E_{-3} est donc la droite vectorielle qui admet pour base $V_3 = (1, 1, -1)$.

▶ **Réduction de A**

Dans la base (V_1, V_2, V_3) l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ représenté par A dans la base canonique a pour matrice représentative :

$$R = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

On peut donc écrire $A = PTP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

▶ **Résolution du système**

Le système (S) s'écrit : $X' = AX = PTP^{-1}X$, soit en posant $U = P^{-1}X$:

$$U' = RU.$$

En notant $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ le système différentiel devient donc :

$$\begin{cases} u_1' = 2u_1 + u_2 \\ u_2' = 2u_2 \\ u_3' = -3u_3 \end{cases}$$

En résolvant d'abord les deux dernières équations, puis la première, on obtient :

$$u_1(t) = (K_1 + K_2 t)\,\mathrm{e}^{2t}$$
$$u_2(t) = K_2\,\mathrm{e}^{2t}$$
$$u_3(t) = K_3\,\mathrm{e}^{-3t}$$

où $(K_1, K_2, K_3) \in \mathbb{R}^3$, puis avec $X = PU$:

$$x(t) = (K_1 + K_2 t)\,\mathrm{e}^{2t} + K_3\,\mathrm{e}^{-3t}$$
$$y(t) = 2K_2\,\mathrm{e}^{2t} + K_3\,\mathrm{e}^{-3t}$$
$$z(t) = (K_1 + K_2 + K_2 t)\,\mathrm{e}^{2t} - K_3\,\mathrm{e}^{-3t}$$

Remarquez que l'expression de P^{-1} ne sert pas ici, il est donc inutile de calculer cette matrice.

Exercice 12.8 : Limite d'une exponentielle de matrices

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\exp(tA) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ si et seulement si toutes les valeurs propres de A sont de partie réelle < 0.

Pour démontrer l'équivalence, on va montrer séparément les deux implications. On commence par la plus simple : si $\exp(tA) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on va avoir une information sur les valeurs propres. En effet, en prenant une valeur propre (et un vecteur propre x associé), comme x est vecteur propre de toutes les puissances de A, x est vecteur propre de $\exp(tA)$, de valeur propre associée que l'on va calculer. En utilisant la limite en $+\infty$, on en déduira que la valeur propre a une partie réelle < 0.

Supposons que $\exp(tA) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Soit λ une valeur propre de A, et x un vecteur propre (non nul) associé. Comme $Ax = \lambda x$, une récurrence aisée montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n x = \lambda^n x$. Ainsi, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\exp(tA)x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} A^n x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} \lambda^n x = \mathrm{e}^{\lambda t} x.$$

La multiplication par le vecteur x étant continue, on a $\exp(tA)x \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et donc $e^{\lambda t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (puisque x est non nul). Ainsi $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$.

Pour l'autre sens, il faut obtenir A en fonction de ses valeurs propres. Sous forme triangulaire supérieure, on ne sait pas calculer l'exponentielle de la matrice A. Il faut donc utiliser le lemme des noyaux, pour se ramener à des sous-espaces où A est somme d'une matrice diagonale et d'une matrice nilpotente.

Supposons que toutes les valeurs propres de A soient de parties réelles strictement négatives. Notons-les $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ (deux à deux distinctes). Le polynôme caractéristique de A est de la forme

$$\chi_A(X) = \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)^{m_i}$$

où les m_i sont les multiplicités des λ_i.
Notons $E = \mathbb{C}^n$ et u l'endomorphisme canonique associé à A. Par le théorème de Cayley-Hamilton, $\chi_A(u) = 0$, puis, d'après le lemme des noyaux (les $(X-\lambda_i)^{m_i}$ étant premiers entre eux deux à deux),

$$E = \mathrm{Ker}(\chi_A(u)) = \bigoplus_{i=1}^{p} \mathrm{Ker}((u - \lambda_i id_E)^{m_i}).$$

Pour i entre 1 et p, $E_i = \mathrm{Ker}((u - \lambda_i id_E)^{m_i})$ est stable par u, et l'endomorphisme u_i induit par u s'écrit $u = \lambda_i id_{E_i} + n_i$, avec $n_i = u - \lambda_i id_{E_i}$ nilpotent.

Il ne faut pas oublier la partie nilpotente dans la décomposition de l'endomorphisme induit par u sur E_i.

Dans une base adaptée à la décomposition précédente, la matrice de u est donc D, diagonale par blocs, avec des blocs $A_1, \dots, A_p$ de la forme $A_i = \lambda_i I_{m_i} + N_i$, où N_i est nilpotente de taille m_i. En calculant par blocs, on a

$$\exp(tD) = \begin{pmatrix} \exp(tA_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \exp(tA_p) \end{pmatrix}$$

et comme on a $P \in GL_n(\mathbb{C})$ tel que $A = P^{-1}DP$ (par le théorème de changement de base), pour $n \in \mathbb{N}$, $A^n = P^{-1}D^nP$ (par récurrence aisée) puis pour $t \in \mathbb{R}$

$$\exp(tA) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} A^n = P^{-1} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} D^n \right) P = P^{-1} \exp(tD) P.$$

Il faut donc montrer que $\exp(tD) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, c'est-à-dire que pour tout i entre 1 et p, $\exp(tA_i) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, pour avoir $\exp(tA) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Or, pour $i \in \{1, \dots, p\}$, on a $A_i = \lambda_i I_{m_i} + N_i$, et ces deux matrices commutent, donc (en notant p le plus petit entier tel que $N_i^p = 0$)

$$\exp(tA_i) = \exp(t\lambda_i I_{m_i} + tN_i) = \exp(t\lambda_i I_{m_i}) \exp(tN_i) = e^{t\lambda_i} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} N_i^n$$

$$= e^{t\lambda_i} \sum_{n=0}^{p-1} \frac{t^n}{n!} N_i^n \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

par croissance comparée, puisque $\mathrm{Re}(\lambda_i) < 0$. Ainsi $\exp(tA) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exercice 12.9 : Utilisation du Wronskien

Soit un réel a et une application $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue et intégrable. On considère l'équation différentielle :

$$(E) \qquad y'' + f(x)y = 0.$$

1. Soit u une solution bornée de (E). Montrer que u' tend vers 0 en $+\infty$.
2. Montrer que (E) possède une solution non bornée.
Pour cela, on pourra raisonner par l'absurde et considérer le wronskien d'une base de l'espace des solutions de (E).

1. u' peut s'exprimer à l'aide d'une intégrale de u'', qui elle-même s'exprime en fonction de f (qui est intégrable) et u (qui est bornée). C'est donc un bon point de départ.

On a $u'' = -fu$. Cette fonction est continue (car f et u le sont). Ainsi, pour $x \in [a, +\infty[$,

$$u'(x) = u'(a) + \int_a^x u''(t)\,\mathrm{d}t.$$

Rien n'avait été précisé sur la continuité de u dans l'énoncé, mais une solution de (E) est par définition au moins deux fois dérivable, sinon u'' n'aurait aucun sens.

Par ailleurs, u'' est intégrable comme produit de la fonction intégrable f et de la fonction bornée u.
La fonction $x \in [a, +\infty[\mapsto \displaystyle\int_a^x u''(t)\,\mathrm{d}t$ possède donc une limite finie en $+\infty$.
Ainsi, $u'(x)$ possède une limite finie quand x tend vers $+\infty$.

Nous obtenons une situation classique : sachant qu'une fonction admet une limite, nous devons montrer que sa limite est nulle.

Rappelons qu'il n'y a aucun théorème général faisant le lien entre le comportement en $+\infty$ d'une fonction f et de sa dérivée f'.

> Il peut arriver que f soit bornée, ou même tende vers 0, mais que f' ne tende pas vers 0 (par exemple, $f(x) = \frac{\sin x^2}{x}$ pour $x > 0$), ou encore que f' tende vers 0 sans que f soit bornée (par exemple la fonction logarithme).

Le résultat proposé ici est différent : sachant que u est bornée et que u' admet une limite finie, cette limite de u' ne peut être que 0.
Dans une telle situation il ne faut donc jamais se lancer dans des explications peu rigoureuses qui sont toutes vouées à l'échec, mais revenir à la définition de la limite.

Soit $\ell = \lim\limits_{x \to +\infty} u'(x)$ et supposons $\ell > 0$. Alors il existe un réel $b \in [a, +\infty[$ tel que, pour tout réel $t \geqslant b$, $u'(t) \geqslant \dfrac{\ell}{2}$. Alors, pour $x \geqslant b$:

$$u(x) = u(b) + \int_b^x u'(t)\,\mathrm{d}t \geqslant u(b) + (x - b)\frac{l}{2}$$

qui tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$, ce qui contredit le fait que u est bornée.
Un raisonnement analogue montre qu'on ne peut avoir $\ell < 0$. Ainsi, $\ell = 0$.

2. Le wronskien d'une famille de solutions (u_1, u_2) de (E), défini par $w = u_1'u_2 - u_1u_2'$, possède deux qualités :

- il vérifie une équation différentielle linéaire du premier ordre et, en particulier, soit il est identiquement nul, soit il ne s'annule jamais (ce deuxième cas étant équivalent à ce que (u_1, u_2) soit une base de l'espace des solutions de (E) ;
- son expression fait intervenir les fonctions u_1 et u_2 ainsi que leurs dérivées. Dans le cadre du problème qui nous intéresse, nous avons une hypothèse sur les fonctions (bornées) et nous avons un résultat sur leurs dérivées (limite nulle en $+\infty$).

Nous allons donc pouvoir en déduire des propriétés de w.
Pour ces raisons, il est souvent intéressant d'étudier le wronskien pour déterminer des propriétés de signe, de caractère borné ou des limites des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène du second ordre.

Soit (u_1, u_2) une base de l'espace des solutions de (E) et w son wronskien. Alors w est dérivable comme combinaison linéaire et produit de fonctions qui le sont et

$$w' = (u_1''u_2 + u_1'u_2') - (u_1'u_2' + u_1u_2'') = u_1''u_2 - u_1u_2'' = 0$$

car $u_1'' = -fu_1$ et $u_2'' = -fu_2$. Ainsi, w est constante.

Le wronskien est toujours constant quand l'équation différentielle linéaire du second ordre étudiée n'a pas de terme en y'. Le calcul ci-dessus appliqué à une équation générale de la forme $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ montre qu'alors $w' = -p(x)w$.
Maintenant que nous savons que le wronskien est constant, la première question nous permet d'étudier son comportement en $+\infty$.

Supposons que toute solution de (E), et donc en particulier u_1 et u_2, est bornée.
Alors, d'après la première question, u_1' et u_2' tendent vers 0 en $+\infty$.
$u_1'u_2$ et u_1u_2' tendent aussi vers 0 en $+\infty$ comme produits d'une fonction bornée par une fonction de limite nulle. Ainsi, w tend également vers 0 en $+\infty$.
w étant constante, ceci entraîne $w = 0$.
C'est absurde, car le wronskien d'une base de l'espace des solutions ne s'annule pas.
Ainsi, (E) possède au moins une solution non bornée.

Exercice 12.10 : Zéros de solutions

On considère l'équation différentielle :

$$(E) \qquad y'' + ay' + by = 0.$$

sur un intervalle réel I, avec a, b continues.
1. Soit y une solution non nulle de (E). Montrer que ses zéros sont isolés.
2. Soient y et z deux solutions non proportionnelles de (E). Montrer que y et z n'ont aucun zéro en commun.
3. Montrer que z s'annule exactement une fois entre deux zéros consécutifs de y.

1. On utilise ici l'unicité de la solution à un problème de Cauchy : si x est un zéro de y, on ne peut pas avoir $y'(x) = 0$, sinon y vérifie la même condition initiale en x que la fonction constante nulle, donc est nulle. Ainsi $y'(x) \neq 0$, ce qui permet de montrer que y ne s'annule pas dans un voisinage de x (sauf en x).

Le théorème de Cauchy-Lipschitz (en particulier l'unicité de la solution à un problème de Cauchy), a beaucoup d'applications théoriques.
Attention cependant, une condition initiale est la donnée de y et de y' au même point.

Soit $x \in I$ un zéro de y. Supposons avoir $y'(x) = 0$. Alors y est une solution de (E) vérifiant $y(x) = y'(x) = 0$, comme la fonction constante nulle. Comme (E) est linéaire et résolue, il y a une unique solution à un problème de Cauchy donné, donc y est la fonction constante nulle.... exclu par hypothèse !

Ainsi $y'(x) \neq 0$. On a alors $y(t) \underset{t \to x}{\sim} y'(x)(t-x)$, donc y ne s'annule pas au voisinage de x (sauf en x). Ainsi les zéros de y sont isolés.

2. Pour tester si deux solutions sont proportionnelles ou non, on utilise le wronskien. Il a la propriété d'être toujours nul, ou jamais.

Notons $w(x) = y(x)z'(x) - y'(x)z(x)$ le wronskien de y et z. Comme y et z ne sont pas nulles ni proportionnelles, w ne s'annule pas. Si x est un zéro de y, on a alors $w(x) = -y'(x)z(x) \neq 0$, donc $z(x) \neq 0$. Ainsi y et z n'ont aucun zéro en commun.

3. Là encore, on utilise le wronskien de y et de z : comme il ne s'annule jamais, il est de signe strict constant. En prenant deux zéros consécutifs de y, on va réussir à trouver deux valeurs de z de signes opposées.

Notons que le fait de considérer deux zéros isolés fait sens puisque les zéros sont isolés par la question 1.

Soit $x_1 < x_2$ deux zéros consécutifs de y. On a alors $y'(x_1)$ et $y'(x_2)$ de signes opposés : en effet, sur $]x_1, x_2[$, y ne s'annule pas (et est continue), donc est de signe strict constant. Supposons que ce signe est > 0 pour fixer les idées. Alors

$$\frac{y(x) - y(x_1)}{x - x_1} = \frac{y(x)}{x - x_1} > 0,$$

donc en passant à la limite quand $x \to x_1^+$, $y'(x_1) \geqslant 0$. On montre de même que $y'(x_2) \leqslant 0$.

Comme w ne s'annule pas (et est continu), il est de signe strictement constant. On a $w(x_1) = -y'(x_1)z(x_1)$ et $w(x_2) = -y'(x_2)z(x_2)$. Ainsi $z(x_1)$ et $z(x_2)$ sont de signes opposés (et non nul par le 2), donc par le théorème des valeurs intermédiaires, z s'annule au moins une fois sur $]x_1, x_2[$.

Si z s'annulait deux fois (ou plus), en renversant les rôles de y et de z, on montrerait comme plus haut que y s'annule au moins une fois entre les deux zéros de z... exclu, puisque x_1 et x_2 sont deux zéros consécutifs de y. Ainsi z s'annule exactement une fois sur $]x_1, x_2[$.

Exercice 12.11 : Lemme de Gromwall

Soient f et g deux fonctions continues sur $\mathbb{R}_+$ et $a \in \mathbb{R}$. On suppose que

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad g(t) > 0 \text{ et } f(t) \leqslant a + \int_0^t f(u)g(u)du.$$

En considérant une inéquation différentielle satisfaite par

$$F(x) = \int_0^x f(u)g(u)du,$$

montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$

$$f(t) \leqslant a \exp\left(\int_0^t g(u)du\right).$$

La fonction F introduite est dérivable de dérivée fg. Comme g est strictement positive, on peut avoir une inéquation différentielle satisfaite par F.

Comme fg est continue, F est dérivable de dérivée fg. Ainsi, comme g est positive, pour $t \in \mathbb{R}_+$, $f(t)g(t) \leqslant ag(t) + F(t)g(t)$, puis

$$F'(t) - F(t)g(t) \leqslant ag(t).$$

Lorsqu'on multiplie une inégalité, il faut toujours bien vérifier que c'est par un nombre positif.

Pour résoudre une inéquation différentielle, la méthode est toujours la même : on pose h une fonction inconnue égale au second membre (ici $F' - Fg = h$), et l'on résout l'équation différentielle obtenue en fonction de h. Une fois cette équation résolue, on utilise alors l'inégalité $h \leqslant ag$ (donnée par l'inéquation de départ) pour avoir le résultat voulu.

Posons $h(t) = F'(t) - F(t)g(t)$. On a alors $h \leqslant ag$. On résout l'équation différentielle :

$$(E) \qquad F' - Fg = h.$$

Notant $G : x \mapsto \displaystyle\int_0^x g(t)dt$, la solution générale de l'équation homogène associée est $x \mapsto \lambda\, \mathrm{e}^{G(x)}$.
On cherche ensuite une solution particulière sous la forme $x \mapsto \lambda(x)\, \mathrm{e}^{G(x)}$, avec λ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+$ (méthode de variation de la constante). En reportant dans l'équation, il vient

$$\lambda'(x)\, \mathrm{e}^{G(x)} + G'(x)\, \lambda(x)\, \mathrm{e}^{G(x)} - g(x)\, \lambda(x)\, e^{G(x)} = h(x)$$

et $\lambda'(x)\,\mathrm{e}^{G(x)} = h(x)$, puis $\lambda'(x) = h(x)\,\mathrm{e}^{-G(x)}$. On peut donc prendre

$$\lambda(x) = \int_0^x h(t)\,\mathrm{e}^{-G(t)}dt$$

et une solution particulière de (E) est de la forme $x \mapsto \mathrm{e}^{G(x)} \displaystyle\int_0^x h(t)\,\mathrm{e}^{-G(t)}dt$.
Ainsi F est de la forme

$$F(x) = \lambda \mathrm{e}^{G(x)} + \mathrm{e}^{G(x)} \int_0^x h(t)\,\mathrm{e}^{-G(t)}dt \quad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Comme $F(0) = 0$, on a $\lambda = 0$. En dérivant, il vient alors :

$$\begin{aligned}
f(x)g(x) = F'(x) &= G'(x)\,\mathrm{e}^{G(x)} \int_0^x h(t)\,\mathrm{e}^{-G(t)}dt + \mathrm{e}^{G(x)}\,h(x)\,\mathrm{e}^{-G(x)} \\
&= g(x)\,\mathrm{e}^{G(x)} \int_0^x h(t)\,\mathrm{e}^{-G(t)}dt + h(x) \\
&\leqslant g(x)\,\mathrm{e}^{G(x)} \int_0^x a\,g(t)\,\mathrm{e}^{-G(t)}dt + a\,g(x) \\
&\leqslant g(x)\,\mathrm{e}^{G(x)} \left[-a\,\mathrm{e}^{-G(t)}\right]_0^x + a\,g(x) \\
&\leqslant -a\,g(x) + a\,g(x)\,\mathrm{e}^{G(x)} + a\,g(x) \\
&\leqslant a\,g(x)\,\mathrm{e}^{G(x)}.
\end{aligned}$$

Comme $g(x) > 0$, en divisant par $g(x)$, on obtient finalement $f(x) \leqslant a\,\mathrm{e}^{G(x)}$.

CHAPITRE

13

Calcul différentiel

Exercice 13.1 : Étude de continuité

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4 - 2x^2y + 3y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que la restriction de f à toute droite passant par l'origine est continue.
2. Montrez que la fonction f n'est pas continue à l'origine.

1. On distingue à part le cas de l'axe des abscisses et de l'axe des ordonnées.

Remarquons tout d'abord que la fonction est bien définie sur $\mathbb{R}^2$ puisque :

$$x^4 - 2x^2y + 3y^2 = (x^2 - y)^2 + 2y^2$$

ne s'annule qu'en $(0,0)$.
La restriction de f aux droites $x = 0$ et $y = 0$ est la fonction nulle (et est donc continue).
La restriction de f à la droite $y = mx$, avec $m \neq 0$, donne, pour $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f(x, mx) = \frac{mx}{x^2 - 2mx + 3m^2} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Comme $f(0,0) = 0$, la restriction de f à toute droite passant par l'origine est donc continue.

2. Pour prouver qu'une fonction de plusieurs variables n'admet pas de limite en $(0,0)$, il suffit de trouver deux suites qui convergent vers $(0,0)$ dont les images par f admettent deux limites différentes.
Ici, comme il faut montrer que f n'est pas continue en $(0,0)$, il suffit de trouver une suite qui converge vers $(0,0)$ et dont l'image ne tend pas vers $f(0,0) = 0$.

On pose $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (2^{-n}, 2^{-2n})_{n\in\mathbb{N}}$ (qui converge vers $(0,0)$). Pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$f(b_n) = f(2^{-n}, 2^{-2n}) = \frac{2^{-4n}}{2 \times 2^{-4n}} = \frac{1}{2}.$$

Par conséquent, $(f(b_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers $f(0,0) = 0$.

Ainsi, la fonction f n'est pas continue à l'origine.

La continuité d'une fonction de plusieurs variables dans toutes les directions n'implique donc pas la continuité tout court !

Exercice 13.2 : Dérivée directionnelle

On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. f est-elle continue ?
2. Montrer que f admet des dérivées dans toutes les directions en $(0,0)$ et les calculer.

1. La fonction f étant continue sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ par les théorèmes généraux, il s'agit surtout d'étudier la continuité en $(0,0)$.
En tâtonnant un peu, on constate que f n'est pas continue, il faut alors trouver une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $(0,0)$ telle que $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers $f(0,0) = 0$. La caractérisation séquentielle de la limite montrera alors que f n'est pas continue en $(0,0)$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = (2^{-2n}, 2^{-n})$. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $(0,0)$, mais comme $f(a_n) = \dfrac{1}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers $f(0,0)$.
Ainsi f n'est pas continue en $(0,0)$.

2. f n'étant pas continue, elle ne peut pas être différentiable. On ne peut donc pas calculer les dérivées directionnelles en utilisant la différentielle ou les dérivées partielles, il faut revenir à la définition des dérivées partielles.

Pour $h = (a,b) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$, la dérivée de f en $(0,0)$ suivant la direction h est la dérivée en 0 (si elle existe) de l'application partielle

$$\varphi : t \mapsto f((0,0) + th) = f(ta, tb).$$

En $t \neq 0$, $\varphi(t) = t\dfrac{ab^2}{a^2 + t^2 b^4}$, et $\varphi(0) = 0$. Si $a \neq 0$, φ est donc dérivable en 0, de dérivée $\dfrac{b^2}{a}$.
Si $a = 0$, φ est constante nulle, donc dérivable en 0, de dérivée nulle.

Dans tous les cas, f admet une dérivée en $(0,0)$ suivant le vecteur h, qui vaut :

$$\frac{b^2}{a} \text{ si } a \neq 0 \text{ , } 0 \text{ sinon.}$$

Une fonction peut donc être dérivable dans toutes les directions sans être continue.

Exercice 13.3 : Différentiabilité d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = \begin{cases} y^2 \sin\left(\dfrac{x}{y}\right) & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que f est différentiable non $\mathscr{C}^1$.

En dehors de l'axes des abscisses, la fonction est $\mathscr{C}^1$ (par les théorèmes généraux). Il faut simplement l'étudier en chaque point de l'axe des abcisses.
On commence par déterminer les dérivées partielles de f, qui serviront d'une part à montrer que f n'est pas $\mathscr{C}^1$, et qui donneront la forme que la différentielle devrait avoir d'autre part.

Sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0)\,;\, x \in \mathbb{R}\}$, la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ (comme quotient et composée de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas). Elle est donc différentiable.
Soit $x \in \mathbb{R}$. En $a = (x,0)$, l'application partielle

$$t \mapsto f((x,0) + t(1,0)) = f(x+t,0) = 0$$

est constante nulle donc dérivable en 0 (de dérivée nulle). Ainsi $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,0)$ existe et vaut 0.
L'application partielle $\varphi : t \mapsto f((x,0) + t(0,1)) = f(x,t)$ vaut 0 en 0, et

$$\frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = t \sin\left(\frac{x}{t}\right) \underset{t \to 0}{\longrightarrow} 0$$

donc φ est dérivable en 0 de dérivée nulle. Ainsi $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,0)$ existe et vaut 0.

Pour montrer que f n'est pas $\mathscr{C}^1$, on montre que les dérivées partielles ne sont pas continues. On utilise pour ce faire la caractérisation séquentielle. Il suffit de trouver une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers $(1,0)$ (par exemple) telle que $\frac{\partial f}{\partial y}(a_n)$ ne converge pas vers 0.

Notons que pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $y \neq 0$,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y \sin\left(\frac{x}{y}\right) - x\cos\left(\frac{x}{y}\right).$$

Posons $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(1, \frac{1}{2\,\pi\,(n+1)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $(1,0)$, mais comme pour $n \in \mathbb{N}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(a_n) = -1$, la suite $\left(\frac{\partial f}{\partial y}(a_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers $0 = \frac{\partial f}{\partial y}(1,0)$.

Ainsi, $\frac{\partial f}{\partial y}$ n'est pas continue sur $\mathbb{R}^2$, et f n'est donc pas de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

On étudie enfin la différentiabilité. Le calcul des dérivées partielles nous dit que si f est différentiable en $(a,0)$, $a \in \mathbb{R}$, sa différentielle est nulle. Il faut donc montrer que que $f(x,y) = o_{(a,0)}(\|(x,y)\|)$. Pour ceci, on distingue les cas $a = 0$ et $a \neq 0$.

Soit $a \in \mathbb{R}$. Si $a \neq 0$, on a clairement

$$f(x,y) = o_{(a,0)}(y) = o_{(a,0)}(\|(x,y)\|).$$

f est donc différentiable en $(a,0)$, de différentielle nulle.
Supposons maintenant $a = 0$. On doit montrer que

$$\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0.$$

Or, comme $|\sin(z)| \leqslant |z|$ pour $z \in \mathbb{R}$ (ce qui vient du fait que la fonction $\sin$ est 1-lipschitzienne puisque sa dérivée, $-\cos$ est bornée par 1), on a

$$\left|\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leqslant \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leqslant \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}$$

puisque $x^2 + y^2 \geqslant 2|xy|$. Ainsi

$$\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0 \quad \text{et} \quad \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$$

f est donc différentiable en $(0,0)$, de différentielle nulle. En conclusion, f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$.

Tout comme pour les applications d'une variable, la différentiabilité n'implique pas le caractère $\mathscr{C}^1$.

Exercice 13.4 : Différentielle du déterminant

1. Montrer que det est différentiable sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et montrer que

$$\forall H \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \quad \mathrm{d}\det(I_n) \cdot H = \mathrm{tr}(H).$$

2. Montrer que pour $(M, H) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2$, $\mathrm{d}\det(M) \cdot H = \mathrm{tr}({}^t\mathrm{Com}(M)H)$ (on commencera par le cas où M est inversible).
3. Si $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ donner une expression du coefficient devant X de χ_M en fonction des cofacteurs de M.

1. Justifier la différentiabilité d'une application donnée explicitement est assez simple, ici le déterminant est un polynôme en les coefficients.

Comme $\det$ est polynomiale en les coefficients de la matrice prise en argument, c'est une fonction différentiable sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Pour le calcul explicite de la différentielle on peut tenter de trouver le développement limité de $\det(I_n + H)$ à l'ordre 1, mais c'est un peu compliqué. Il est plus simple de revenir aux dérivées directionnelles.

$\mathrm{d}\det(I_n) \cdot H$ est la dérivée du déterminant suivant la matrice H, si H est non nul (et vaut 0 en 0).
Pour $H \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{d}\det(I_n) \cdot H$ est la dérivée de $\det$ en I_n suivant le vecteur H (si $H \neq 0$). C'est donc la dérivée en 0 de $\varphi : t \mapsto \det(I_n + tH)$. Notons $h_1, \ldots, h_n$ les valeurs propres (complexes) de H, comptées avec multiplicité. Celles de $I_n + tH$ dans $\mathbb{C}$ sont $1 + th_1, \ldots, 1 + th_n$. Par suite

$$\det(I_n + tH) = \prod_{i=1}^{n}(1 + th_i) = 1 + t\sum_{i=1}^{n} h_i + \underset{t \to 0}{O}(t^2)$$

en développant le produit (tous les termes non écrits comportent au moins deux t, donc sont tous des $\underset{t\to 0}{O}(t^2)$). φ admet un développement limité à l'ordre 1 en 0, donc est dérivable en 0, avec $\varphi'(0) = \sum\limits_{i=1}^{n} h_i = \mathrm{tr}(H)$, et on a

$$\mathrm{d}\det(I_n) \cdot H = \mathrm{tr}(H).$$

Ceci reste vrai pour $H = 0$ puisque $\mathrm{d}\det$ et tr s'y annulent.

Revenir aux applications partielles permet de transformer un calcul de différentielle en un calcul de dérivée.

2. Dans le cas où M est inversible, on peut revenir à la différentielle de l'identité en écrivant $M+H = M(I_n + M^{-1}H)$. Avec la question précédente, il est alors facile de trouver la différentielle du déterminant en M.

Soit $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Pour $H \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on a, avec la question précédente,

$$\begin{aligned}\det(M+H) &= \det(M(I_n+M^{-1}H)) = \det(M)\det(I_n+M^{-1}H)\\ &= \det(M)(1+\operatorname{tr}(M^{-1}H) + \underset{H\to 0}{o}(H))\\ &= \det(M) + \det(M)\operatorname{tr}(M^{-1}H) + \underset{H\to 0}{o}(H)\\ &= \det(M) + \operatorname{tr}({}^t\operatorname{Com}(M)H) + \underset{H\to 0}{o}(H)\end{aligned}$$

puisque ${}^t\operatorname{Com}(M)M = \det(M)I_n$, donc $\det(M)M^{-1} = {}^t\operatorname{Com}(M)$. Comme $H \mapsto \operatorname{tr}({}^t\operatorname{Com}(M)H)$ est linéaire, il s'agit de la différentielle de $\det$ en M.

Pour revenir au cas général, il faut se souvenir que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ (cela a été prouvé dans l'exercice **4.5**). Le déterminant étant de classe $\mathscr{C}^1$, la continuité de la différentielle va permettre de conclure.

Soit maintenant $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On sait que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathbb{R}$. En effet, M a un nombre fini de valeurs propres, donc une infinité de termes de la suite $(M+2^{-p}I_n)_{p\in\mathbb{N}}$ sont inversibles, et on peut extraire de cette suite une suite $(M_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de matrices inversibles qui converge vers M.
Pour $H \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $p \in \mathbb{N}$, on a $\mathrm{d}\det(M_p)\cdot H = \operatorname{tr}({}^t\operatorname{Com}(M_p)H)$. Comme $\mathrm{d}\det$ est continue ($\det$ est polynomiale en les coefficients de la matrice prise en argument donc $\mathscr{C}^1$), comme tr et le produit matriciel sont continus (car linéaire et bilinéaire) et comme $(\operatorname{Com}(M_p))_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers $\operatorname{Com}(M)$ (puisque chaque coefficient de cette suite est un polynôme en les coefficients de M_p), en passant la relation plus haut à la limite, on obtient $\mathrm{d}\det(M)\cdot H = \operatorname{tr}({}^t\operatorname{Com}(M)H)$.

3. On applique le développement limité du déterminant, calculé dans la question précédente, pour obtenir le résultat voulu.

Pour $t \in \mathbb{R}$, on a, par la question précédente,

$$\begin{aligned}\det(tI_n - M) &= (-1)^n\det(M-tI_n)\\ &= (-1)^n\det(M) + (-1)^n\operatorname{tr}({}^t\operatorname{Com}(M)(-tI_n)) + \underset{t\to 0}{o}(t)\\ &= (-1)^n\det(M) + (-1)^{n-1}t\sum_{i=1}^n \operatorname{Com}(M)_{i,i} + \underset{t\to 0}{o}(t)\end{aligned}$$

donc le coefficient en X de χ_M est

$$(-1)^{n-1}\sum_{i=1}^n \operatorname{Com}(M)_{i,i} = (-1)^{n-1}\operatorname{tr}(\operatorname{Com}(M)).$$

Exercice 13.5 : Inégalité des accroissements finis

Soient U un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$. On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme définie par $\|x\| = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$.
1. Montrer que pour $(a, b) \in U^2$,

$$f(b) = f(a) + \int_0^1 \mathrm{d}f_{a+t(b-a)}(b-a)\ \mathrm{d}t.$$

2. On suppose avoir $M > 0$ tel que

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad \forall a \in U, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\right| \leqslant M.$$

Montrer que pour $(a, b) \in U^2$, $|f(b) - f(a)| \leqslant M\, n\, \|b - a\|$.

1. Comme U est un ouvert convexe, le segment $[a, b]$ est inclus dans U. On peut donc revenir à une fonction d'une seule variable en utilisant l'application partielle $t \mapsto f(a + t(b - a))$ sur $[0, 1]$.

> ⚠ L'intégrale d'une fonction de deux variables n'étant pas définie, on ne peut pas montrer le résultat demandé sans revenir à une fonction d'une variable.

Posons $\varphi : t \mapsto f(a + t(b - a))$. Comme U est convexe, φ est définie sur $[0, 1]$. Elle est de classe $\mathscr{C}^1$ comme composée de fonctions qui le sont, et par la formule de la chaîne, on a, pour $t \in [0, 1]$

$$\varphi'(t) = \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i) \frac{\partial f}{\partial x_i}(a + t(b - a)) = \mathrm{d}f_{a+t(b-a)}(b - a).$$

Ainsi l'intégrale est bien définie (l'intégrande est continue car φ' l'est) et

$$f(b) - f(a) = \varphi(1) - \varphi(0) = \int_0^1 \varphi'(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^1 \mathrm{d}f_{a+t(b-a)}(b - a)\ \mathrm{d}t.$$

2. Pour exploiter la question précédente, il faut majorer $|\,\mathrm{d}f_{a+t(b-a)}(b-a)|$. On revient pour ce faire à son expression en fonction des dérivées partielles de f.

Pour $(a,b) \in U^2$ et $t \in [0,1]$, on a par l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} |\,\mathrm{d}f_{a+t(b-a)}(b-a)| &= \left|\sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i)\,\frac{\partial f}{\partial x_i}(b-a)\right| \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n}|b_i-a_i|\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(b-a)\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n}\|b-a\|\,M \\ &\leqslant n\,M\,\|b-a\|. \end{aligned}$$

En intégrant ensuite cette inégalité sur $[0,1]$, on obtient :

$$\begin{aligned} |f(b)-f(a)| &= \left|\int_0^1 \mathrm{d}f_{a+t(b-a)}(b-a)\ \mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^1 |\,\mathrm{d}f_{a+t(b-a)}(b-a)|\ \mathrm{d}t \\ &\leqslant \int_0^1 n\,M\,\|b-a\|\,\mathrm{d}t = n\,M\,\|b-a\|. \end{aligned}$$

Exercice 13.6 : Fonctions homogènes

Soient $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $\alpha > 0$. On dit que f est α-homogène si

$$\forall (x_1,\dots,x_n,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^*, \quad f(t\,x_1,\dots,t\,x_n) = t^\alpha\, f(x_1,\dots,x_n).$$

Dans toute la suite, on suppose $\alpha > 1$ et f de classe $\mathscr{C}^1$.

1. Montrer que f est α-homogène si et seulement si ses dérivées partielles sont $(\alpha-1)$-homogènes et $f(0,\dots,0) = 0$.

2. Montrer que f est α-homogène si et seulement si f satisfait l'équation aux dérivées partielles

$$(E) \qquad x_1\,\frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + x_n\,\frac{\partial f}{\partial x_n} = \alpha\, f.$$

1. Pour montrer l'équivalence, il faut montrer les deux implications.

▶ **Sens direct**

Dans ce sens, il suffit de dériver par rapport à x_i la définition de f α-homogène.

Supposons f α-homogène. Pour $t \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$f(0,\dots,0) = f(t\times 0,\dots,t\times 0) = t^\alpha f(0,\dots,0)$$

donc en prenant $t = 1$ par exemple, on trouve $f(0,\dots,0) = 0$.

D'autre part, pour $t \in \mathbb{R}_+^*$ et $(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$, en dérivant par rapport à x_i la définition de f α-homogène (les deux membres étant $\mathscr{C}^1$ car f l'est) on trouve :

$$t\frac{\partial f}{\partial x_i}(t\,x_1,\dots,t\,x_n) = t^\alpha\,\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1,\dots,x_n)$$

et en divisant par t, il vient que $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ est $(\alpha-1)$-homogène.

► **Sens réciproque**

On a ici une information sur toutes les dérivées partielles et une condition initiale. Pour montrer que f est α-homogène, on pose alors une fonction g correspondant à la différence des deux membres de la définition. L'hypothèse sur les dérivées partielles nous permettra de montrer que les dérivées partielles de g sont toutes nulles, donc que g est constante. La condition initiale nous donnera g constante nulle.

Supposons que les dérivées partielles de f sont $(\alpha - 1)$-homogènes et que $f(0, \ldots, 0) = 0$.
Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$ fixé. On pose g la fonction définie sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$g(x_1, \ldots, x_n) = f(t\,x_1, \ldots, t\,x_n) - t^\alpha\, f(x_1, \ldots, x_n).$$

g est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$ comme combinaison linéaire et composée de fonctions qui le sont. Pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, on a :

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n) = t\frac{\partial f}{\partial x_i}(t\,x_1, \ldots, t\,x_n) - t^\alpha\, \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n) = 0$$

puisque $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ est $(\alpha - 1)$-homogène. Comme $\mathbb{R}^n$ est un ouvert connexe par arcs, g est constante.
On a $g(0, \ldots, 0) = 0$ (puisque $f(0, \ldots, 0) = 0$), donc g est constante nulle. Ainsi

$$f(t\,x_1, \ldots, t\,x_n) = t^\alpha\, f(x_1, \ldots, x_n)$$

et comme ceci vaut pour tout $t > 0$, f est α-homogène.

Tout comme on avait l'habitude de démontrer des formules par dérivation pour des fonctions d'une variable, on peut avoir des résultats sur les fonctions de n variables. Il faut juste faire attention à bien obtenir toutes les dérivées partielles nulles.

2. Là encore, il faut traiter les deux implications indépendamment.

► **Sens direct**

Dans la question précédente, on a dérivé par rapport aux x_i la relation de définition de f homogène. Pour obtenir une nouvelle formule avec des dérivées partielles, il n'y a plus que la variable t par rapport à laquelle on peut dériver.

Lorsqu'on doit dériver des fonctions composées de n variables, attention à appliquer rigoureusement la formule de la chaîne.

Supposons f α-homogène. En dérivant par rapport à t la relation de définition de f α-homogène, on a, pour $t \in \mathbb{R}_+^*$ et $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, par la formule de la chaîne :

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(t\,x_1, \dots, t\,x_n) + \dots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(t\,x_1, \dots, t\,x_n) = \alpha t^{\alpha-1} f(x_1, \dots, x_n).$$

En prenant $t = 1$, f satisfait donc bien (E).

▶ **Sens réciproque**

Comme dans la question précédente, on pose une fonction intermédiaire correspondant à la différence des deux membres de la définition de f α-homogène. Comme la relation (E) vient d'une dérivée par rapport à t, on choisit de voir cette différence comme une fonction de la variable t.

Supposons que f satisfasse (E).
Soit $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ fixé, on pose g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$g(t) = f(t\,x_1, \dots, t\,x_n) - t^\alpha\, f(x_1, \dots, x_n).$$

g est de classe $\mathscr{C}^1$ comme combinaison linéaire et composée de fonctions qui le sont. Par le formule de la chaîne, et comme f vérifie (E), on a, pour $t \neq 0$

$$\begin{aligned} g'(t) &= x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(t\,x_1, \dots, t\,x_n) + \dots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_1}(t\,x_1, \dots, t\,x_n) \\ &\quad - \alpha\, t^{\alpha-1}\, f(x_1, \dots, x_n) \\ &= \frac{1}{t}\left(t x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(t\,x_1, \dots, t\,x_n) + \dots + t x_n \frac{\partial f}{\partial x_1}(t\,x_1, \dots, t\,x_n)\right) \\ &\quad - \alpha\, t^{\alpha-1}\, f(x_1, \dots, x_n) \\ &= \frac{1}{t}\, \alpha\, f(t\,x_1, \dots, t\,x_n) - \alpha\, t^{\alpha-1}\, f(x_1, \dots, x_n) \\ &= \frac{\alpha}{t}\, g(t). \end{aligned}$$

g vérifie donc une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre à coefficients continus. Ainsi, g est de la forme $g : t \mapsto \lambda\, \mathrm{e}^{\alpha \ln t} = \lambda\, t^\alpha$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
De plus, on a $g(1) = 0$, donc $\lambda = 0$. Ainsi g est constante nulle et

$$f(t\,x_1, \dots, t\,x_n) = t^\alpha\, f(x_1, \dots, x_n).$$

Comme ceci vaut pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, f est α-homogène.

Exercice 13.7 : À propos du théorème de Schwarz

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\,\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que f est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

2. Calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$. Que peut-on en déduire ?

1. Pour montrer qu'une fonction est de classe $\mathscr{C}^1$, il faut montrer que ses dérivées partielles existent en tout point de $\mathbb{R}^2$ et qu'elles définissent des fonctions continues. Ici il n'y a aucun problème, sauf en $(0,0)$. On applique donc les théorèmes généraux sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ avant d'étudier ce point à part.

Sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$, f est $\mathscr{C}^1$ comme quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas.
En $(0,0)$, on revient à la définition pour le calcul des dérivées partielles. L'application $f : t \mapsto f((0,0)+t(1,0)) = f(t,0)$ est constante nulle, donc dérivable en 0. Ainsi $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ existe et vaut 0. On montre de même que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existe et vaut 0.

Aux points où il n'y a pas de problèmes, le calcul des dérivées partielles se fait directement, en considérant les autres variables comme constantes. Aux points à problèmes, il faut revenir à la définition.

On doit ensuite étudier la continuité des dérivées partielles en $(0,0)$. Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$, on calcule aisément :

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{(3x^2\,y - y^3)(x^2+y^2) - (x^3\,y - x\,y^3)\,(2x)}{(x^2+y^2)^2} \\ &= \frac{x^4\,y + 4x^2\,y^3 - y^5}{(x^2+y^2)^2}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{(x^3 - 3x\,y^2)(x^2+y^2) - (x^3\,y - x\,y^3)\,(2y)}{(x^2+y^2)^2} \\ &= \frac{x^5 - 4x^3\,y^2 - x\,y^4}{(x^2+y^2)^2}\end{aligned}$$

Pour montrer que ces dérivées partielles sont continues en $(0,0)$, il faut les majorer, en valeur absolue, par une fonction de deux variables qui tend vers 0.
Vu la forme du dénominateur, on passe en coordonnées polaires.

Pour $(r,\theta) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta)\right| &\leqslant \frac{r^5\left|\cos^4\theta\sin\theta\right| + 4r^5\left|\cos^2\theta\sin^3\theta\right| + r^5\left|\sin^5\theta\right|}{r^4}\\ &\leqslant 6r.\end{aligned}$$

donc

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| \leqslant 6\sqrt{x^2+y^2} \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0.$$

Ainsi $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est continue en $(0,0)$. On montre de même que

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| \leqslant 6\sqrt{x^2+y^2} \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0,$$

et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ est continue en $(0,0)$.
En conclusion, f est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

2. Pour le calcul des dérivées partielles croisées, on revient à la définition, comme dans la question précédente.

Posons

$$\varphi : t \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}((0,0)+t(1,0)) = \frac{\partial f}{\partial y}(t,0).$$

On a $\varphi(t) = 0$ si $t = 0$, et pour $t \in \mathbb{R}^*$, $\varphi(t) = t$ d'après la question précédente.
Ainsi φ est dérivable en 0, de dérivée 1, et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ existe et vaut 1.
De même,

$$\psi : t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}((0,0)+t(0,1)) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,t)$$

vérifie $\psi(t) = 0$ si $t = 0$, et pour $t \in \mathbb{R}^*$, $\psi(t) = -t$ d'après la question précédente.
Ainsi ψ est dérivable en 0, de dérivée -1, et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ existe et vaut -1.
Comme $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$, le théorème de Schwarz permet de conclure que f n'est pas $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 13.8 : Une équation aux dérivées partielles

En utilisant le changement de variables $(u,v)=\left(xy,\dfrac{x}{y}\right)$ déterminer toutes les fonctions f, $\mathscr{C}^2$ sur $\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$, qui vérifient :

$$(E) \qquad x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0.$$

Comme avec les équations différentielles, le changement de variable va faire changer les dérivées. On ne peut donc pas substituer directement dans l'équation aux dérivées partielles.

On cherche donc à poser g une fonction $\mathscr{C}^2$ telle que $g(u,v)=f(x,y)$. Ceci nécessite de trouver x et y en fonction de u et v.

Pour (x,y) et $(u,v)\in\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$, on a

$$\begin{cases} u=xy \\ v=\frac{x}{y}\end{cases} \iff \begin{cases} u=vy^2 \\ x=vy\end{cases} \iff \begin{cases} y=\sqrt{\frac{u}{v}} \\ x=\sqrt{uv}\end{cases}$$

On pose donc $g:(u,v)\mapsto f\left(\sqrt{uv},\sqrt{\dfrac{u}{v}}\right)$, $\mathscr{C}^2$ sur $U=\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ ses deux fonctions coordonnées l'étant, comme composée de fonctions qui le sont.

On part ensuite de de l'égalité $f(x,y)=g\left(xy,\dfrac{x}{y}\right)$ qu'on dérive deux fois, pour pouvoir reporter dans (E).

Si l'on dérive la relation dans l'autre sens, on ne pourra pas reporter directement dans (E).

Pour $(x,y)\in U$, on a $f(x,y)=g\left(xy,\dfrac{x}{y}\right)$. On note $h:(x,y)\mapsto\left(xy,\dfrac{x}{y}\right)$ et par la formule de la chaîne :

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)&=\frac{\partial h_1}{\partial x}(x,y)\frac{\partial g}{\partial u}(h(x,y))+\frac{\partial h_2}{\partial x}(x,y)\frac{\partial g}{\partial v}(h(x,y))\\&=y\frac{\partial g}{\partial u}\left(xy,\frac{x}{y}\right)+\frac{1}{y}\frac{\partial g}{\partial v}\left(xy,\frac{x}{y}\right)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{\partial h_1}{\partial y}(x,y)\frac{\partial g}{\partial u}(h(x,y)) + \frac{\partial h_2}{\partial y}(x,y)\frac{\partial g}{\partial v}(h(x,y))\\ &= x\frac{\partial g}{\partial u}\left(xy,\frac{x}{y}\right) - \frac{x}{y^2}\frac{\partial g}{\partial v}\left(xy,\frac{x}{y}\right)\end{aligned}$$

puis on a de même :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= y\,\left[y\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}\left(xy,\frac{x}{y}\right) + \frac{1}{y}\,\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}\left(xy,\frac{x}{y}\right)\right]\\ &\quad + \frac{1}{y}\,\left[y\,\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}\left(xy,\frac{x}{y}\right) + \frac{1}{y}\,\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\left(xy,\frac{x}{y}\right)\right]\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= x\,\left[x\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}\left(xy,\frac{x}{y}\right) - \frac{x}{y^2}\,\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}\left(xy,\frac{x}{y}\right)\right] + \frac{2x}{y^3}\,\frac{\partial g}{\partial v}\left(xy,\frac{x}{y}\right)\\ &\quad - \frac{x}{y^2}\,\left[x\,\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}\left(xy,\frac{x}{y}\right) - \frac{x}{y^2}\,\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\left(xy,\frac{x}{y}\right)\right] + \frac{2x}{y^3}\,\frac{\partial g}{\partial v}\left(xy,\frac{x}{y}\right)\end{aligned}$$

d'après le théorème de Schwarz. En reportant dans l'équation (E), on obtient

$$\begin{aligned}0 &= x^2y^2\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}\left(xy,\frac{x}{y}\right) + 2x^2\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}\left(xy,\frac{x}{y}\right) + \frac{x^2}{y^2}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\left(xy,\frac{x}{y}\right)\\ &\quad - x^2y^2\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}\left(xy,\frac{x}{y}\right) + 2x^2\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}\left(xy,\frac{x}{y}\right) - \frac{x^2}{y^2}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\left(xy,\frac{x}{y}\right)\\ &\quad - \frac{2x}{y}\,\frac{\partial g}{\partial v}\left(xy,\frac{x}{y}\right)\\ &= 4x^2\,\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}\left(xy,\frac{x}{y}\right) - \frac{2x}{y}\,\frac{\partial g}{\partial v}\left(xy,\frac{x}{y}\right)\end{aligned}$$

ce qui équivaut à

$$2u\,\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}(u,v) - \frac{\partial g}{\partial v}(u,v) = 0.$$

On intègre d'abord par rapport à v pour obtenir

$$2u\,\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) - g(u,v) = \varphi_1(u).$$

avec φ_1 une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 pour la variable u. L'équation homogène a pour solution particulière

$$(u,v)\mapsto \psi(v)\exp\left(\frac{1}{2}\ln(v)\right) = \psi(v)\sqrt{u}$$

où ψ est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. On sait que (E')

$$(E') \qquad 2uy' - y = \varphi_1$$

admet une solution particulière φ sur $\mathbb{R}_+^*$ qui est deux fois dérivable (et même $\mathscr{C}^\infty$).

On pourrait calculer φ en fonction de φ_1 avec la méthode de variation de la constante, mais c'est complètement inutile pour la suite.

On en déduit que g est de la forme

$$g : (u, v) \mapsto \varphi(u) + \sqrt{u}\psi(v)$$

où φ et ψ sont des fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$. En revenant en x et y, on conclut :

$$f : (x, y) \mapsto \varphi(xy) + \sqrt{xy}\,\psi\left(\frac{x}{y}\right).$$

Exercice 13.9 : Équation des cordes vibrantes

Considérons une corde de longueur ℓ fixée aux extrémités d'abscisses 0 et ℓ. Lors de vibrations dans des conditions idéales, désignons par $\varphi(x, t)$ le déplacement à l'instant t du point d'abscisse x.
Cette fonction, supposée de classe $\mathscr{C}^2$, vérifie l'*équation des cordes vibrantes* :

$$(E) \qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - \frac{1}{C^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0.$$

où C est une constante > 0.
1. Déterminer α et β pour que le changement de variables

$$(u, v) = (x + \alpha t, v = x + \beta t)$$

ramène l'équation (E) à la forme $\dfrac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} = 0$ avec $F(u, v) = \varphi(x, t)$.
2. En déduire la forme des solutions de (E).
3. Préciser ces solutions en sachant que les extrémités de la corde sont fixes.

1. Il faut tout d'abord que le changement de variables soit bijectif (pour pouvoir exprimer x et t en fonction de u et v et définir F telle que $F(u, v) = \varphi(x, t)$).

Si l'on ne peut pas « inverser » la relation $u = x+\alpha t$ et $v = x+\beta t$, on ne peut même pas définir F. De manière générale, pour pouvoir naviguer des anciennes variables aux nouvelles et inversement, il est souhaitable qu'un changement de variable soit bijectif.

L'application $(x, t) \mapsto (x + \alpha t, x + \beta t)$ est linéaire, on calcule donc son déterminant pour savoir si elle est bijective.

L'application $h : (x,t) \mapsto (x+\alpha t, x+\beta t)$ est linéaire, de déterminant $\beta - \alpha$. Elle est donc bijective si et seulement si $\alpha \neq \beta$, et sa réciproque est alors $(u,v) \mapsto \dfrac{1}{\beta-\alpha}(\beta u - \alpha v, v-u)$, comme on le constate en résolvant le système

$$\begin{cases} u = x + \alpha t \\ v = x + \beta t \end{cases}$$

On peut donc poser $F : (u,v) \mapsto \varphi\left(\dfrac{\beta u - \alpha v}{\beta - \alpha}, \dfrac{v-u}{\beta-\alpha}\right)$, qui est $\mathscr{C}^2$, ses deux fonctions coordonnées l'étant clairement.

Il est ensuite préférable de calculer les dérivées partielles qui figurent dans l'équation donnée pour pouvoir les reporter.

Pour $(x,t) \in \mathbb{R}^2$, on a $\varphi(x,t) = F(h(x,t))$ donc par la formule de la chaîne :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t) &= \frac{\partial F}{\partial u}(h(x,t))\frac{\partial h_1}{\partial x}(x,t) + \frac{\partial F}{\partial v}(h(x,t))\frac{\partial h_2}{\partial x}(x,t) \\ &= \frac{\partial F}{\partial u}(h(x,t)) + \frac{\partial F}{\partial v}(h(x,t)) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,t) &= \frac{\partial F}{\partial u}(h(x,t))\frac{\partial h_1}{\partial y}(x,t) + \frac{\partial F}{\partial v}(h(x,t))\frac{\partial h_2}{\partial y}(x,t) \\ &= \alpha\frac{\partial F}{\partial u}(h(x,t)) + \beta\frac{\partial F}{\partial v}(h(x,t)) \end{aligned}$$

puis de même

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x,t) = \frac{\partial^2 F}{\partial u^2}(h(x,t)) + 2\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}(h(x,t)) + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2}(h(x,t))$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}(x,t) &= \alpha\left[\alpha\,\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}(h(x,t)) + \beta\,\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}(h(x,t))\right] \\ &\quad + \beta\left[\alpha\,\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}(h(x,t)) + \beta\,\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}(h(x,t))\right] \\ &= \alpha^2\,\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}(h(x,t)) + 2\alpha\beta\,\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}(h(x,t)) + \beta^2\,\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}(h(x,t)). \end{aligned}$$

En substituant dans l'équation (E), on obtient alors (après simplifications)

$$\left(1 - \frac{\alpha^2}{C^2}\right)\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + 2\left(1 - \frac{\alpha\beta}{C^2}\right)\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + \left(1 - \frac{\beta^2}{C^2}\right)\frac{\partial^2 F}{\partial v^2} = 0$$

ce qui donne la forme réduite annoncée en choisissant α et β tels que :

$$\alpha^2 = C^2, \qquad \beta^2 = C^2 \quad \text{et} \quad \alpha \neq \beta$$

soit, par exemple : $\alpha = C$ et $\beta = -C$.

2. On peut maintenant résoudre l'équation (plus simple) en F obtenue à la question précédente. On revient ensuite aux variables initiales.

La forme de la solution générale de l'équation $\dfrac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} = 0$ est

$$F : (u, v) \mapsto G(u) + H(v),$$

avec G et H deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, ce qui donne :

$$\varphi : (x, t) \mapsto f(x + Ct) + g(x - Ct)$$

où f et g sont des fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ quelconques.

3. Le fait que les extrémités de la corde soient fixes se traduit par $\varphi(0, t) = \varphi(\ell, t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On calcule alors ce que ces propriétés imposent à f et g.

Comme les extrémités de la corde sont fixes, on a pour $t \in \mathbb{R}$:

$$\varphi(0, t) = f(Ct) + g(-Ct) = 0$$
$$\varphi(\ell, t) = f(\ell + Ct) + g(\ell - Ct) = 0.$$

La première condition montre que $g(-u) = -f(u)$, ce qui conduit à :

$$\varphi(x, t) = f(x + Ct) - f(Ct - x).$$

La seconde condition s'écrit alors :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(Ct + \ell) - f(Ct - \ell) = 0$$

ce qui montre que f est périodique de période 2ℓ. La solution du problème des cordes vibrantes est donc :

$$\varphi(x, t) = f(Ct + x) - f(Ct - x)$$

où f est une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ de période 2ℓ.

Cette résolution du problème des cordes vibrantes (1747) par d'Alembert en fait le fondateur des équations aux dérivées partielles.
En 1753, Daniel Bernoulli considère que les fonctions périodiques les plus simples sont les fonctions trigonométriques $\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}t\right)$ et $\cos\left(\frac{n\pi}{\ell}t\right)$.
Il représente alors f sous la forme d'une série trigonométrique.
La suite des travaux (notamment par Poisson, Fourier) amena aux séries de Fourier.

Exercice 13.10 : Recherche d'extrema

Trouver les extrema de la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x, y) = x\,\mathrm{e}^y + y\,\mathrm{e}^x.$$

On commence par chercher les candidats à être extrema, qui sont les points critiques de f.

▶ Détermination des points critiques

La fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ qui est un ouvert.
Les éventuels extrema de f vérifient les conditions nécessaires :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \mathrm{e}^y + y\,\mathrm{e}^x = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\,\mathrm{e}^y + \mathrm{e}^x = 0 \end{cases}$$

La première équation donne : $\mathrm{e}^{y-x} = -y$ et la seconde : $\mathrm{e}^{y-x} = -\dfrac{1}{x}$ si $x \neq 0$.
On a donc $xy = 1$.

- On peut remplacer y par $\dfrac{1}{x}$ dans la deuxième équation, c'est-à-dire chercher x tel que $g(x) = 0$ avec le tableau de variation de la fonction g définie par $g(x) = x\,\mathrm{e}^{1/x} + \mathrm{e}^x$.
- Mais il est plus rapide d'écrire les équations du système sous la forme :

$$\mathrm{e}^{y-x} + y = 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{e}^{x-y} + x = 0$$

d'où par soustraction :

$$2\,\mathrm{sh}(y-x) + (y-x) = 0.$$

La fonction $\varphi : t \mapsto 2\,\mathrm{sh}\,t + t$ est dérivable, et pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\varphi'(t) = 2\,\mathrm{ch}\,t + 1 > 0.$$

Ainsi φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc injective. Comme $\varphi(0) = 0$, on a :

$$\varphi(t) = 0 \iff t = 0.$$

On doit donc avoir $x = y$. Par suite $y = -\mathrm{e}^{y-x} = -1$ et $x = \dfrac{1}{y} = -1$. On vérifie ensuite aisément que ce point vérifie

$$\frac{\partial f}{\partial x}(-1,-1) = \frac{\partial f}{\partial y}(-1,-1) = 0.$$

Le seul point critique de f est donc $(x,y) = (-1,-1)$.

Le fait que $(-1,-1)$ soit un point critique n'implique pas que f y admette un extremum. Nous avons juste restreint le problème à un seul point : si f a un extremum, c'est en $(-1,-1)$.

▶ Étude du point critique

Pour déterminer si f admet ou non un extremum local en $(-1,-1)$, on effectue un DL de f, dans le but de trouver un équivalent simple de $f(x,y) - f(-1,-1)$ en $(-1,-1)$. Dans ce développement, le terme d'ordre 1 correspond à la différentielle de f en $(-1,-1)$, nulle puisqu'on a un point critique. Il faut donc faire un DL à l'ordre 2 au moins.

On a $f(-1,-1) = -2\,\mathrm{e}^{-1}$, donc pour $(h,k) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}
f(h-1,k-1) + 2\mathrm{e}^{-1} &= (h-1)\,\mathrm{e}^{k-1} + (k-1)\,\mathrm{e}^{h-1} + 2\,\mathrm{e}^{-1} \\
&= (h-1)\,\mathrm{e}^{-1}\left(1 + k + \frac{k^2}{2} + o_0(k^2)\right) \\
&\quad + (k-1)\,\mathrm{e}^{-1}\left(1 + h + \frac{h^2}{2} + o_0(h^2)\right) + 2\,\mathrm{e}^{-1} \\
&= \mathrm{e}^{-1}\left(hk - \frac{k^2}{2} + hk - \frac{h^2}{2}\right) + o_{(0,0)}(h^2+k^2) \\
&\underset{(h,k)\to(0,0)}{\sim} hk\,\mathrm{e}^{-1} - \frac{\mathrm{e}^{-1}}{2}(h-k)^2.
\end{aligned}$$

L'équivalent trouvé n'est pas de signe constant au voisinage de $(-1,-1)$: en prenant $h = k$, $f(h-1,h-1) - f(-1,-1)$ a même signe que $h^2\mathrm{e}^{-1}$ au voisinage de 0, donc est strictement positif.
Cependant, si on prend $h = 0$, $f(-1,k-1) - f(-1,-1)$ a même signe que $-\frac{\mathrm{e}^{-1}}{2}\,k^2$ au voisinage de 0, donc est strictement négatif.
f n'admet donc pas d'extremum en $(-1,-1)$.

Exercice 13.11 : Extrema sur un compact

Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\;;\; x^2 + y^2 \leqslant 9\}$. Déterminer les extrema sur D de la fonction définie par :

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + y^2 - 1.$$

La fonction f est continue comme composée de fonctions continues et comme D est fermé et borné en dimension finie, c'est un compact.
Dans ce cas, on sait que f admet sur D un maximum (et un minimum) global atteint au moins une fois.
On cherche, pour commencer, les points critiques de f dans l'intérieur de D.

▶ **Détermination des points critiques**

La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ donc sur D.
Les éventuels extrema de f sur l'ouvert :

$$\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\;;\; 0 < x^2 + y^2 < 9\}$$

vérifient les conditions nécessaires :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + 2y = 0$$

Ce système n'admet pas de solution dans Δ.

Le théorème du cours qui dit que si f admet un extremum en a, alors a est un point critique de f n'est vrai que si a est intérieur à l'ensemble sur lequel f est $\mathscr{C}^1$.

Les extrema de f sur D sont à chercher sur la frontière de Δ, c'est-à-dire au point $(0,0)$ et sur le cercle d'équation $x^2+y^2=9$.

▶ **Étude en $(0,0)$**

On a $f(0,0)=-1$ et on a toujours $f(x,y) \geqslant -1$, l'égalité n'ayant lieu qu'en $(0,0)$.
La fonction f admet donc un minimum global en $(0,0)$.

▶ **Étude sur le cercle**

Le cercle de centre O et de rayon 3 peut se paramétrer :

$$M : [0,2\pi[\to \mathbb{R}, \quad t \mapsto (3\cos t, 3\sin t).$$

La restriction de f au cercle s'écrit donc $g : t \mapsto 2+9\sin^2(t)$ et ses valeurs décrivent le segment $[2,11]$. Cette fonction admet son maximum en $t=\pm\dfrac{\pi}{2}$.
Sur le cercle, la fonction f admet donc son maximum en $(0,3)$ et $(0,-3)$ et ce maximum vaut 11.
Ce maximum est nécessairement le maximum de f sur D, puisque f continue sur D, fermé borné en dimension finie, donc compact. Elle admet donc un maximum global sur D, mais qui n'est atteint ni dans l'intérieur de D, ni en $(0,0)$.
Il est donc atteint sur le cercle, et c'est en $(0,3)$ et $(0,-3)$.
En conclusion, la fonction f admet un minimum global de valeur -1 atteint en $(0,0)$; un maximum global de valeur 11 atteint en $(0,3)$ et $(0,-3)$.

Exercice 13.12 : Tangente à une hyperbole

On appelle hyperbole une courbe du plan d'équation cartésienne

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

où a et $b>0$. Donner une équation de la tangente en un point (x_0,y_0) de cette hyperbole.

Une hyperbole est une ligne de niveau de l'application

$$f : (x,y) \mapsto \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}.$$

D'après le cours, la tangente en un point est orthogonale au gradient de f puisque f est $\mathscr{C}^1$.

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}.$$

f est de classe $\mathscr{C}^1$ car polynomiale.
En (x_0, y_0), point de l'hyperbole, on a

$$\overrightarrow{\nabla} f(x_0, y_0) = \left(\frac{2x_0}{a^2}, -\frac{2y_0}{b^2}\right).$$

Ce vecteur est non nul sinon $x_0 = y_0 = 0$, et alors (x_0, y_0) ne vérifierait pas l'équation de l'hyperbole. Ainsi l'hyperbole admet une tangente en (x_0, y_0), qui est orthogonale au vecteur $\overrightarrow{\nabla} f(x_0, y_0)$.
Son équation est donc de la forme $\dfrac{2x_0}{a^2}x - \dfrac{2y_0}{b^2}y = c$, $c \in \mathbb{R}$. Comme la tangente passe par le point (x_0, y_0), on a

$$c = \frac{2x_0}{a^2}x_0 - \frac{2y_0}{b^2}y_0 = 2$$

donc la tangente à l'hyperbole au point (x_0, y_0) a pour équation

$$\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1.$$

De manière générale, l'équation d'une droite est de la forme

$$ax + by + c = 0$$

(et non $y = ax + b$), pour ne pas oublier toutes les droites verticales.

Partie 4

Probabilités

Probabilités

CHAPITRE 14

Espaces probabilisés

Exercice 14.1 : Loi de succession de Laplace

On dispose de N urnes, numérotées de 0 à N. L'urne k contient k boules blanches et $N-k$ boules noires. On choisit une urne au hasard, et, sans connaître son numéro, on en tire un nombre n fois de suite une boule, avec remise après chaque tirage.
1. Quelle est la probabilité que le tirage suivant donne encore une boule blanche, sachant que, au cours des n premiers tirages, seules des boules blanches ont été tirées ?
2. Calculer la limite de cette probabilité lorsque N tend vers l'infini.

1. Le but de cette question est de calculer une probabilité conditionnelle. Pour pouvoir la calculer, on a besoin de savoir dans quelle urne on est en train de tirer. On tire nécessairement dans une urne de numéro comprise entre 0 et N, il faut donc utiliser la formule des probabilités totales.

Il est nécessaire de se ramener à des probabilités conditionnelles pour ce calcul : on ne peut pas connaître les probabilités de tirage tant qu'on ne connait pas l'urne dans laquelle on tire.

Pour k entre 0 et N, on note U_k l'événement : « On tire dans l'urne numéro k. » et B_n l'événement « On a tiré n boules blanches d'affilée. »
Si l'on pioche dans l'urne k, la probabilité de tirer n boules blanches est $\left(\frac{k}{N}\right)^n$ (puisque l'urne k contient k boules blanches parmi N). Ainsi

$$\mathbf{P}(B_n|U_k) = \left(\frac{k}{N}\right)^n.$$

Par la formule des probabilités totales, on a alors

$$\mathbf{P}(B_n) = \sum_{k=0}^{N} \mathbf{P}(B_n|U_k)\mathbf{P}(U_k) = \sum_{k=0}^{N} \left(\frac{k}{N}\right)^n \times \frac{1}{N+1}$$
$$= \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^{N} \left(\frac{k}{N}\right)^n,$$

le terme en $\dfrac{1}{N+1}$ venant de l'équiprobabilité des différentes urnes.
Comme B_{n+1} implique l'événement B_n,

$$\mathbf{P}(B_{n+1}|B_n) = \frac{\mathbf{P}(B_{n+1} \cap B_n)}{\mathbf{P}(B_n)} = \frac{\mathbf{P}(B_{n+1})}{\mathbf{P}(B_n)},$$

et on obtient au final

$$\mathbf{P}(B_{n+1}|B_n) = \frac{\frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^{N} \left(\frac{k}{N}\right)^{n+1}}{\frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^{N} \left(\frac{k}{N}\right)^{n}} = \frac{\sum_{k=0}^{N} \left(\frac{k}{N}\right)^{n+1}}{\sum_{k=0}^{N} \left(\frac{k}{N}\right)^{n}}.$$

2. On reconnaît dans les deux sommes précédentes (au numérateur et au dénominateur) des sommes de Riemann (à quelques facteurs près).

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $N \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^{N} \left(\frac{k}{N}\right)^n = \frac{N}{N+1} \left(\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{k}{N}\right)^n + \frac{1}{N} \right)$$
$$\underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 t^n \, \mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}$$

par opérations sur les limites, puisque

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f\left(\frac{k}{N}\right) \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f(t)dt$$

si f est continue sur $[0, 1]$.
On déduit de ceci que

$$\mathbf{P}(B_{n+1}|B_n) \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{n+1}{n+2}.$$

Ce nombre représente la probabilité qu'une expérience (dont on ignore la probabilité de réussite) qui a réussi n fois d'affilée réussisse une nouvelle fois.

Exercice 14.2 : Ruine du joueur

Deux joueurs s'affrontent lors d'une succession de parties de pile ou face. Ils possèdent initialement un montant a et b respectivement, et à chaque victoire le perdant donne un euro au gagnant. Le joueur A a une probabilité p de gagner à chaque lancer. Le jeu s'arrête lorsqu'un joueur n'a plus d'argent.
On pose $N = a+b$, $q = 1-p$, et pour $a \in \{0, \ldots, N\}$ on note p_a (respectivement q_a) la probabilité que le joueur A (respectivement B) finisse ruiné s'il commence avec n euros.
1. Montrer que si $0 < a < N$, $p_a = pp_{a+1} + qp_{a-1}$.
2. En déduire l'expression de p_a.
3. Calculer de même q_a puis $p_a + q_a$. Que peut-on en déduire ?

1. Soit $a \in \{1, \ldots, N-1\}$. Pour relier p_a à p_{a+1} et p_{a-1}, on étudie l'issue de la première partie de pile ou face : si le premier joueur gagne, on est ramené au problème avec un montant initial de $a+1$, s'il perd, avec un montant initial de $a-1$.

> Notons G l'événement « Le joueur A a gagné la première partie » et R l'événement « Le joueur A est ruiné avec une mise initiale de a. »
> Si le joueur A gagne la première partie, il aborde la suite du jeu avec $a+1$ euros. Ainsi $\mathbf{P}(R|G) = p_{a+1}$. De même, $\mathbf{P}(R|\overline{G}) = p_{a-1}$.
> Ainsi, par la formule des probabilités totales,
> $$p_a = \mathbf{P}(R) = \mathbf{P}(R|G)\mathbf{P}(G) + \mathbf{P}(R|\overline{G})\mathbf{P}(\overline{G}) = p_{a+1}p + p_{a-1}q.$$

2. La suite finie $(p_a)_{0 \leqslant a \leqslant N}$ satisfait une équation de récurrence double, on utilise donc la technique vue en première année pour calculer p_a.

> L'équation caractéristique associée à la suite $(p_a)_{0 \leqslant a \leqslant N}$ est $x = px^2 + q$, de discriminant $1 - 4pq = 1 - 4p(1-p) = 4p^2 - 4p + 1 = (1-2p)^2$.
>
> - Si $p \neq \dfrac{1}{2}$, le discriminant est non nul et les solutions de cette équation sont
> $$\frac{1+(1-2p)}{2p} = \frac{1-p}{p} = \frac{q}{p} \text{ et } \frac{1-(1-2p)}{2p} = 1.$$
> Ainsi, on a $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout a entre 0 et N,
> $$p_a = \lambda + \mu \left(\frac{q}{p}\right)^a.$$
> - Si $p = \dfrac{1}{2}$, le discriminant est nul et l'équation admet 1 pour racine double. Ainsi, on a $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout a entre 0 et N, $p_a = \lambda + \mu a$.

Pour déterminer les constantes λ et μ, on a alors besoin de deux valeurs particulières de p_a. On utilise les cas limites.

On a $p_0 = 1$ et $p_N = 0$.

- Si $p \neq \dfrac{1}{2}$, on obtient alors le système

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ \lambda + \mu q^N p^{-N} = 0 \end{cases}$$

En effectuant $L_1 - L_2$, on trouve $\mu(1 - q^N p^{-N}) = 1$ et $\mu = \dfrac{1}{1 - q^N p^{-N}}$.
Par suite,

$$\lambda = 1 - \mu = 1 - \frac{1}{1 - q^N p^{-N}} = -\frac{q^N p^{-N}}{1 - q^N p^{-N}}.$$

En conclusion, on obtient donc

$$p_a = \lambda + \mu \left(\frac{q}{p}\right)^a = \frac{q^N p^{-N} - q^a p^{-a}}{q^N p^{-N} - 1}.$$

- Si $p = \dfrac{1}{2}$, on obtient $\lambda = 1$ et $\lambda + \mu N = 0$, donc $\mu = -\dfrac{1}{N}$, et il vient

$$p_a = 1 - \frac{1}{N} a.$$

3. On peut faire un calcul similaire au précédent pour trouver

$$q_a = \frac{p^N q^{-N} - p^{N-a} q^{a-N}}{p^N q^{-N} - 1} \text{ si } p \neq \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad q_a = \frac{1}{N} a \text{ sinon.}$$

On peut aussi remarquer que q_a s'obtient à partir de p_a en échangeant les rôles de p et q, et de a et $N - a$.

On calcule alors dans le cas $p \neq \dfrac{1}{2}$

$$\begin{aligned} p_a + q_a &= \frac{q^N p^{-N} - q^a p^{-a}}{q^N p^{-N} - 1} + \frac{p^N q^{-N} - p^{N-a} q^{a-N}}{p^N q^{-N} - 1} \\ &= \frac{q^N p^{-N} - q^a p^{-a}}{q^N p^{-N} - 1} + \frac{1 - p^{-a} q^a}{1 - p^{-N} q^N} \\ &= \frac{q^N p^{-N} - 1}{q^N p^{-N} - 1} = 1. \end{aligned}$$

Ceci reste vrai si $p = \dfrac{1}{2}$. On en déduit que le jeu se termine de manière presque sûre, c'est-à-dire que l'un des joueurs sera ruiné en temps fini avec probabilité 1.

Contrairement au cas fini, un événement de probabilité nulle (ou 1) n'est pas nécessairement vide (ou certain). L'événement A : « Le jeu ne se termine pas en temps fini » est un exemple d'événement différent de l'événement impossible, mais de probabilité 0.

Exercice 14.3 : Lemmes de Borel-Cantelli

Soit $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé. On considère une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements et on note A l'ensemble des $x \in \Omega$ qui appartiennent à une infinité de A_n.

1. Écrire l'ensemble A en fonction des A_n et montrer que $A \in \mathscr{T}$.

2. On suppose que la série $\sum \mathbf{P}(A_n)$ converge, montrer que $\mathbf{P}(A) = 0$.

On suppose maintenant les A_n mutuellement indépendants et que la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(A_n)$ diverge.

3. Pour $x \in \mathbb{R}$, montrer que $1 + x \leqslant \mathrm{e}^x$. En déduire que pour $m \leqslant n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=m}^{n} \overline{A_k}\right) \leqslant \exp\left(-\sum_{k=m}^{n} \mathbf{P}(A_k)\right).$$

4. Montrer que $\mathbf{P}(A) = 1$.

1. Pour écrire A en fonction des A_n, il faut commencer par traduire en termes de quantificateurs la propriété appartenir à une infinité de A_n.

Pour traduire l'appartenance d'un x à une infinité de A_n, il faut se souvenir qu'un sous-ensemble de $\mathbb{N}$ est infini si et seulement si il n'est pas majoré.

On a $x \in A$ si et seulement si $\{n \in \mathbb{N}\,;\, x \in A_n\}$ est infini, si et seulement si il n'est pas majoré.

On a donc $x \in A$ si et seulement si $\forall p \in \mathbb{N}$, $\exists n \geqslant p$, $x \in A_n$. On a donc

$$A = \{x \in \Omega,\ \forall p \in \mathbb{N},\ \exists n \geqslant p,\ x \in A_n\} = \bigcap_{p\in\mathbb{N}} \bigcup_{n=p}^{+\infty} A_n.$$

Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n \in \mathscr{T}$, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\bigcup_{n=p}^{+\infty} A_n \in \mathscr{T},$$

puis $A \in \mathscr{T}$.

Pour écrire la négation de A est majoré, ne pas hésiter à repartir de A majoré pour utiliser les règles de négation des quantificateurs.

2. La suite $\left(\bigcup\limits_{k=n}^{+\infty} A_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est clairement décroissante pour l'inclusion. On va donc pouvoir utiliser la continuité décroissante de $\mathbf{P}$.

D'autre part, la probabilité de cet événement est plus petite que $\sum\limits_{k=n}^{+\infty} \mathbf{P}(A_k)$ par sous-additivité. Comme c'est le reste d'une série convergente, on trouvera le résultat cherché.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note

$$D_n = \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k.$$

Il est clair que $D_{n+1} \subset D_n$, donc $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Ainsi on a

$$\mathbf{P}(D_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbf{P}\left(\bigcap_{p=0}^{+\infty} A_p\right) = \mathbf{P}(A).$$

D'autre part, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a, par sous-additivité de $\mathbf{P}$,

$$\mathbf{P}(D_n) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k\right) \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} \mathbf{P}(A_k) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

puisque la série de terme général $\mathbf{P}(A_k)$ converge.
Ainsi, par unicité de la limite, $\mathbf{P}(A) = 0$.

On a donc montré que l'événement $\overline{A}$: « x n'appartient à aucun des A_n, sauf un nombre fini » a pour probabilité 1.

3. On peut étudier la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x - x - 1$ pour montrer qu'elle toujours positive. On peut également appliquer la formule de Taylor avec reste intégral entre 0 et x pour obtenir l'inégalité. On peut enfin utiliser la convexité de la fonction exponentielle. C'est la méthode retenue ici.

Comme $x \mapsto \mathrm{e}^x$ est convexe, elle est au-dessus de ses tangentes, en particulier de sa tangente en 0.
Cette tangente a pour équation $y = \exp'(0)(x - 0) + \exp(0) = x + 1$, donc pour $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x \geqslant 1 + x$.

Pour la suite de la question l'indépendance des A_n implique celle des $\overline{A_n}$, donc la probabilité du membre de gauche se réécrit comme un produit. On va donc appliquer l'inégalité précédente à chacun des membres.

Pour k entre m et n, on a $\mathbf{P}(\overline{A_k}) = 1 - \mathbf{P}(A_k) \leqslant \exp(-\mathbf{P}(A_k))$, d'après ce qui précède (avec $x = -\mathbf{P}(A_k)$).
Ainsi, comme $\overline{A_m}, \ldots, \overline{A_n}$ sont indépendants (puisque $A_m, \ldots, A_n$ le sont), on a, en faisant le produit de ces inégalités (toutes positives) :

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=m}^{n} \overline{A_k}\right) = \prod_{k=m}^{n} \mathbf{P}(\overline{A_k}) \leqslant \prod_{k=m}^{n} \mathrm{e}^{-\mathbf{P}(A_k)} = \exp\left(-\sum_{k=m}^{n} \mathbf{P}(A_k)\right).$$

4. On va passer à la limite $n \to +\infty$ le résultat de la question précédente pour calculer ensuite la probabilité de $\overline{A}$.

Comme la série de terme général $\mathbf{P}(A_k)$ diverge, pour $m \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=m}^{n} \mathbf{P}(A_k) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Ainsi, d'après la question précédente,

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=m}^{+\infty} \overline{A_k}\right) = 0.$$

Or une réunion d'événements de probabilité nulle est encore de probabilité nulle (c'est une conséquence de la sous-additivité de $\mathbf{P}$), donc

$$\mathbf{P}(\overline{A}) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{m=0}^{+\infty} \bigcap_{k=m}^{+\infty} \overline{A_k}\right) = 0.$$

En conclusion, $\mathbf{P}(A) = 1$.

On a donc démontré que, dans le cas où les événements A_n sont indépendants, $\mathbf{P}(A) = 0$ ou 1. C'est une conséquence de la loi du zéro-un de Kolmogorov, qui affirme que certains événements terminaux sont presque sûrs ou de probabilité nulle.

Exercice 14.4 : Apparition de mots dans une suite de piles ou faces

On considère une suite de lancers indépendants d'une pièce ayant probabilité $p \in]0,1[$ de tomber sur pile.
1. Montrer qu'on obtient presque sûrement au moins une fois pile (resp. face).
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on obtient presque sûrement au moins n fois pile (resp. face). En déduire qu'on obtient de manière presque sûre une infinité de piles (resp. de faces).
On considère un mot m de longueur N formé de lettres P (pour pile) et F (pour faces).
3. Pour $k \in \mathbb{N}$, quelle est la probabilité que les lancers $kN+1$ à $k(N+1)$ donnent une suite de piles et faces correspondant au mot m ?
4. En déduire qu'il est presque sûr que dans la suite de piles ou faces tirés, on trouve une infinité de fois le mot m.

1. Pour montrer qu'un événement est presque sûr (ou négligeable), on utilise très souvent la continuité croissante ou décroissante. Ici par exemple, on peut considérer l'événement A_n : « Aucun lancer jusqu'au n-ième n'a donné pile. » et l'intersection des A_n correspond à l'événement A : « Aucun lancer n'a donné pile. ». Comme la suite des A_n est décroissante pour l'inclusion, on peut appliquer la continuité décroissante.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n l'événement « Aucun lancer jusqu'au n-ième n'a donné pile. »
Comme les lancers sont mutuellement indépendants, on a $\mathbf{P}(A_n) = (1-p)^n$.
La suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante pour l'inclusion et en notant A l'événement « Aucun lancer n'a donné pile. » on obtient, par continuité décroissante de $\mathbf{P}$,

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(A_n) = 0$$

puisque $1-p<1$. Par suite, $\mathbf{P}(\overline{A}) = 1$ et il est presque sûr d'obtenir au moins une fois pile.
On montre de même qu'il est presque sûr d'obtenir au moins une fois face (car $p>0$).

Même si une expérience a une probabilité infime de se réaliser, lorsqu'on la répète une infinité de fois, on obtiendra sa réalisation au moins une fois (et en fait même une infinité de fois) de manière presque sûre.

2. On va raisonner de la même manière que dans la question précédente. Pour $q \geqslant n$, on note $B_{q,n}$ l'événement « Au q-ième lancer, on a obtenu strictement moins de n

piles » et B_n « On a obtenu strictement moins de n piles. ». Comme la suite $(B_{q,n})_{q\geqslant n}$ est décroissante pour l'inclusion, on pourra encore appliquer la continuité décroissante.

Pour $r \geqslant n$, on note $B_{r,n}$ l'événement « Au r-ième lancer, on a obtenu strictement moins de n piles ». Si $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, le fait d'obtenir k piles parmi les r premiers lancers a pour probabilité $\binom{r}{k} p^k (1-p)^{r-k}$, donc

$$\mathbf{P}(B_{r,n}) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{r}{k} p^k (1-p)^{r-k}.$$

Notons que pour $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, on a

$$\binom{r}{k} = \frac{r!}{k!(r-k)!} = \frac{r(r-1)\ldots(r-k+1)}{k!} \underset{r\to+\infty}{\sim} \frac{r^k}{k!}$$

donc par croissance comparée, $\binom{r}{k} p^k (1-p)^{r-k} \underset{r\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (puisque $1-p<1$).
La suite $(B_{r,n})_{r\geqslant n}$ est décroissante pour l'inclusion et en notant B_n l'événement « On a obtenu strictement moins de n piles. » on obtient, par continuité décroissante de $\mathbf{P}$,

$$\mathbf{P}(B_n) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{r\geqslant n} B_{r,n}\right) = \lim_{r\to+\infty} \mathbf{P}(r_{q,n}) = 0$$

comme somme de n termes de limite nulle. Par suite, $\mathbf{P}(\overline{B_n}) = 1$ et il est presque sûr d'obtenir au moins n fois pile.
On montre de même qu'il est presque sûr d'obtenir au moins n fois face (car $p>0$).

Pour montrer qu'il est presque sûr qu'on obtient une infinité de fois pile, il faut montrer que $B = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} B_n$ est de probabilité 1. Cela vient de l'inégalité de Boole, qui permet de montrer qu'une réunion dénombrable d'événements négligeables est encore négligeable.

Comme pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\overline{B_n}$ est négligeable, $\overline{B} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \overline{B_n}$ est négligeable.
Ainsi B est presque sûr, et il est presque sûr d'obtenir une infinité de fois pile.
On montre de même qu'il est presque sûr d'obtenir une infinité de fois face

3. Avec l'indépendance des lancers, le calcul de cette probabilité est très simple.

Pour $k \in \mathbb{N}$, on note B_k l'événement dont on demande de chercher la probabilité. Soit a le nombre de P dans le mot m (qui comporte alors $N-a$ fois la lettre F). Comme les lancers sont indépendants, on a

$$\mathbf{P}(B_k) = p^a (1-p)^{N-a}.$$

4. Si l'on regarde les lancers par tranches de N successifs, l'apparition du mot m a une probabilité de $p^a(1-p)^{N-a}$ par la question précédente. Comme c'est un réel de $]0,1[$, on peut appliquer la question 2, en considérant chacun des N comme une expérience de Bernoulli ayant probabilité $P = p^a(1-p)^{N-a}$ de réussir. Cela montrera que le mot m apparaît une infinité de fois dans la suite des mots donnés par les lancers de $kN+1$ à $k(N+1)$, donc en particulier dans la suite de lancers.

Notons C l'événement « Le mot m apparaît une infinité de fois dans la suite des mots donnés par les lancers de $kN+1$ à $k(N+1)$. » et D l'événement « Le mot m apparaît une infinité de fois dans la suite des lancers. » On a clairement $C \subset D$.
$\mathbf{P}(C)$ correspond à la probabilité d'obtenir une infinité de réussites dans une expérience de Bernoulli ayant probabilité $P = p^a(1-p)^{N-a}$ de réussir. Comme $P \in]0,1[$, $\mathbf{P}(C) = 1$ par la question 2. Par suite $\mathbf{P}(D) = 1$ et D est presque sûr.

Exercice 14.5 : Produit eulérien

On se fixe un réel $s > 1$ et on considère l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbf{P})$ où $\Omega = \mathbb{N}^*$ et $\mathbf{P}$ est définie par :

$$\forall n \in \Omega, \quad \mathbf{P}(\{n\}) = \frac{1}{\zeta(s)n^s},$$

ζ désignant la fonction de Riemann :

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par A_n l'événement « p est multiple de n. »
1. Justifier que $\mathbf{P}$ est bien une probabilité et calculer $\mathbf{P}(A_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Montrer que si $\mathscr{P}$ est l'ensemble des nombres premiers, les événements A_p, $p \in \mathscr{P}$ sont indépendants.
3. En déduire que

$$\mathbf{P}(\{1\}) = \prod_{p \in \mathscr{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) \quad \text{puis} \quad \zeta(s) = \prod_{p \in \mathscr{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}.$$

1. Pour montrer que $\mathbf{P}$ est une probabilité, il faut vérifier que les $\mathbf{P}(\{n\})$ sont des réels positifs ou nuls dont la somme vaut 1.

Pour $n \in \Omega$, $\mathbf{P}(\{n\})$ est un réel positif ou nul, terme général d'une série convergente (par le critère de Riemann) et on a

$$\sum_{n \in \Omega} \mathbf{P}(\{n\}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\zeta(s)n^s} = \frac{1}{\zeta(s)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} = 1.$$

Ainsi $\mathbf{P}$ définit bien une probabilité sur Ω.

On utilise ensuite la formule du cours pour calculer les probabilités cherchées.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a alors

$$\mathbf{P}(A_n) = \sum_{p \in A_n} \mathbf{P}(\{p\}) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(\{kn\}) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\zeta(s)(kn)^s}$$
$$= \frac{1}{n^s \zeta(s)} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^s} = \frac{1}{n^s}$$

2. Il faut ici vérifier la définition d'une famille indépendante.

L'indépendance deux à deux n'implique pas l'indépendance mutuelle. Il est donc nécessaire de prendre n événements !

Soient $p_1, \ldots, p_n$ des éléments deux à deux distincts de $\mathscr{P}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $A_{p_1} \cap \ldots \cap A_{p_n}$ est l'ensemble des multiples communs à $p_1, \ldots, p_n$, donc de $p_1 \cdots p_n$ (puisque les p_i sont deux à deux premiers entre eux).
Ainsi $A_{p_1} \cap \ldots \cap A_{p_n} = A_{p_1 \cdots p_n}$, et, avec la première question, on obtient

$$\mathbf{P}(A_{p_1} \cap \cdots \cap A_{p_n}) = \mathbf{P}(A_{p_1 \ldots p_n}) = \frac{1}{(p_1 \ldots p_n)^s} = \frac{1}{p_1^s} \times \cdots \times \frac{1}{p_n^s}$$
$$= \mathbf{P}(A_{p_1}) \ldots \mathbf{P}(A_{p_n}).$$

En conclusion, les événements A_p, $p \in \mathscr{P}$ sont indépendants.

3. On reconnaît dans le produit infini le produit de tous les $(1 - \mathbf{P}(A_p)) = \mathbf{P}(\overline{A_p})$. On va donc utiliser l'indépendance des $\overline{A_p}$ (conséquence de l'indépendance des A_p). Pour passer à limite, on utilisera la continuité décroissante de $\mathbf{P}$.

Notons $\{p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots\}$ une énumération croissante de $\mathscr{P}$.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons $E_n = \overline{A_{p_1}} \cap \cdots \cap \overline{A_{p_n}}$. Il est clair que $E_{n+1} \subset E_n$, donc la suite $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante pour l'inclusion.
Les événements $A_{p_1}, \ldots, A_{p_n}$ étant indépendants d'après la question précédente, il en est de même des événements $\overline{A_{p_1}}, \ldots, \overline{A_{p_n}}$. Ainsi

$$\mathbf{P}(E_n) = \mathbf{P}(\overline{A_{p_1}} \cap \cdots \cap \overline{A_{p_n}}) = \mathbf{P}(\overline{A_{p_1}}) \ldots \mathbf{P}(\overline{A_{p_n}}) = \prod_{i=1}^{n} (1 - \mathbf{P}(A_{p_i}))$$
$$= \prod_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{p_i^s}\right)$$

Soit

$$E = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} E_n.$$

Par continuité décroissante de $\mathbf{P}$, on $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{P}(E_n) = \mathbf{P}(E)$. Or E est l'événement « n n'est multiple d'aucun nombre premier. » On a donc $E = \{1\}$, et $\mathbf{P}(E) = \dfrac{1}{\zeta(s)}$.

Ainsi

$$\zeta(s) = \frac{1}{\mathbf{P}(E)} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{P}(E_n)} = \prod_{p\in\mathscr{P}} \frac{1}{1-p^{-s}}.$$

CHAPITRE

Variables aléatoires discrètes 15

Exercice 15.1 : Natalité

On suppose que dans un pays donné, tous les couples ont des enfants jusqu'à obtenir un garçon. Le but de cet exercice est de trouver la proportion P de garçons dans la population (en supposant que garçon et fille sont équiprobables à la naissance).

1. Soit X le nombre d'enfants dans un couple. Donner la loi de la variable aléatoire X.

2. Calculer P, puis $\mathbf{E}(P)$.

1. Il faut calculer les $\mathbf{P}(X = n)$ pour $n \in \mathbb{N}$. Il s'agit de la répétition d'une expérience de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$ jusqu'à obtenir un succès.

On sait d'après le cours qu'il s'agit d'une loi géométrique.

On a clairement $\mathbf{P}(X = 0) = 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}(X = n)$ est la probabilité que les $n - 1$ premiers enfants du couple soient des filles, et que le n-ième soit un garçon. Ainsi

$$\mathbf{P}(X = n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2^n}.$$

X suit donc la loi géométrique de paramètre $\dfrac{1}{2}$.

2. La variable aléatoire P s'exprime aisément en fonction de X, le calcul de son espérance est alors une application du théorème de transfert.

Il est impossible ici de calculer directement l'espérance de P sans utiliser le théorème de transfert. De manière générale, la définition de l'espérance servira plutôt dans les exercices théoriques.

Un couple donné a $X - 1$ filles et 1 garçon, par définition, donc $P = \dfrac{1}{X}$.

Par le théorème de transfert, on a alors :

$$\mathbf{E}(P) = \mathbf{E}\left(\frac{1}{X}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\mathbf{P}(X = n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}.$$

Comme la série converge (il s'agit d'une série entière usuelle), P admet bien une espérance finie.

On reconnaît le développement en série entière de $-\ln(1-x)$ appliqué à $x = \frac{1}{2}$, donc $\mathbf{E}(P) = \ln(2)$.

Exercice 15.2 : Cartes à collectionner

Pour fidéliser ses clients, une entreprise décide de joindre à ses produits des cartes à collectionner de n types différents. On considère que les cartes jointes à chaque produit suivent des lois uniformes (sur l'ensemble des n possibles) indépendantes. On note N la variable aléatoire représentant le nombre de produits à acheter pour avoir les n cartes. Déterminer l'espérance de N et en donner un équivalent quand $n \to +\infty$.

Notons N_i le nombre d'achats à effectuer pour avoir i cartes différentes. On a $N_1 = 1$ et pour $i \in \{1, \dots, n-1\}$, $N_{i+1} - N_i$ représente le nombre de produits à acheter pour avoir une carte supplémentaire différente des autres.
Ceci correspond à attendre le premier succès dans une répétition d'expériences de Bernoulli. Cette loi est donc géométrique.

Soit $i \in \{1, \dots, n-1\}$.
Pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}(N_{i+1} - N_i = k)$ est la probabilité que les $k-1$ premières cartes jointes (à partir de l'instant N_i) soient parmi les i que le collectionneur possède déjà (donc avec une probabilité de $\frac{i}{n}$), et que la k-ième soit une des $n-i$ que le collectionneur n'a pas encore (donc avec probabilité de $\frac{n-i}{n}$). Les achats étant indépendants, on a donc

$$\mathbf{P}(N_{i+1} - N_i = n) = \left(\frac{i}{n}\right)^{k-1}\left(\frac{n-i}{n}\right).$$

$N_{i+1} - N_i$ suit donc une loi géométrique de paramètre $\frac{n-i}{n}$. Ainsi $N_{i+1} - N_i$ est d'espérance finie et

$$\mathbf{E}(N_{i+1} - N_i) = \frac{n}{n-i}.$$

Par suite, comme $N = N_n = \sum_{i=1}^{n-1}(N_{i+1} - N_i) + N_1$ (par télescopage), la linéarité de l'espérance donne N d'espérance finie et on a :

$$\mathbf{E}(N) = \sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{E}(N_{i+1} - N_i) + \mathbf{E}(N_1) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{n}{n-i} + 1 = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{n}{i} + 1$$
$$= n \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}.$$

Là encore, le calcul direct de l'espérance était impossible. C'est en écrivant N en fonction de lois usuelles, dont on connaît l'espérance, qu'on peut aboutir.

Il faut maintenant trouver un équivalent de la somme harmonique quand $n \to +\infty$, ce qui est un grand classique. On fait une comparaison avec une intégrale.

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, et $t \in [k, k+1]$, on a $\dfrac{1}{k+1} \leqslant \dfrac{1}{t} \leqslant \dfrac{1}{k}$. En intégrant, il vient

$$\frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \frac{1}{k}.$$

Ainsi, notant $S_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$, on obtient (par la relation de Chasles) :

$$S_{n+1} - 1 \leqslant \int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant S_n.$$

On a donc $\ln(n+1) \leqslant S_n \leqslant \ln(n) + 1$, dont on déduit aisément que $S_n \sim \ln n$. Un équivalent de $\mathbf{E}(N)$ quand $n \to +\infty$ est donc $n \ln n$.

Exercice 15.3 : Compétition d'athlétisme

Lors d'une compétition de saut en hauteur, un athlète tente de franchir des barres successives numérotées $1, 2, \ldots, n, \ldots$. Il n'a droit qu'à un seul essai par barre. On suppose les sauts indépendants, et que la probabilité de réussite du n-ième saut est $\dfrac{1}{n}$.

1. On note X la variable aléatoire égale au numéro du dernier saut réussi. Calculer la loi de X.

2. Déterminer la fonction génératrice de X.

3. Montrer que X^2 est d'espérance finie et calculer $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{V}(X)$.

1. Il faut calculer toutes les probabilités $\mathbf{P}(X = n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
L'événement $X = n$ nécessite que l'athlète réussisse les n premiers sauts mais rate le dernier. L'indépendance des sauts permet de calculer aisément cette probabilité.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note S_n l'événement « L'athlète a réussi le n-ième saut. » En supposant les sauts indépendants, les événements $S_1, \ldots, S_{n+1}$ sont indépendants, donc les événements $S_1, \ldots, S_n, \overline{S_{n+1}}$ le sont également. Ainsi

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X = n) &= \mathbf{P}(\overline{S_{n+1}} \cap S_n \cap \ldots \cap S_1) = \mathbf{P}(\overline{S_{n+1}})\mathbf{P}(S_n)\ldots\mathbf{P}(S_1)\\ &= \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{i} = \frac{n}{n+1} \times \frac{1}{n!} = \frac{n}{(n+1)!}\end{aligned}$$

2. Le calcul de la fonction génératrice de X se fait en utilisant la définition.

Pour $t \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$\begin{aligned}G_X(t) &= \sum_{n=1}^{+\infty}\mathbf{P}(X = n)t^n = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{(n+1)!}t^n = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}\right)t^n\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{t^n}{n!} - \frac{1}{t}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{t^{n+1}}{(n+1)!} = \mathrm{e}^t - 1 - \frac{\mathrm{e}^t - 1 - t}{t}\\ &= \frac{t\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^t + 1}{t}\end{aligned}$$

Les séries entières considérées sont bien de rayon de convergence infini puisqu'il s'agit de combinaisons linéaires de la série exponentielle.

3. Les calculs de $\mathbf{E}(X)$ et de $\mathbf{V}(X)$ nécessitent le calcul de sommes de séries. Puisque l'on connaît la fonction génératrice, $\mathbf{E}(X)$ sera alors la dérivée de cette fonction en 1, et $\mathbf{V}(X)$ se calcule à partir de sa dérivée seconde.

Là encore, le calcul direct (surtout pour la variance) serait fastidieux. On contourne le problème en utilisant les fonctions génératrices.

Notons que G_X est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ (comme quotient et combinaison linéaire de fonctions qui le sont) et pour $t \in \mathbb{R}^*$,

$$G'_X(t) = \frac{(\mathrm{e}^t + t\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^t)t - (t\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^t + 1)}{t^2} = \frac{t^2\mathrm{e}^t - t\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^t - 1}{t^2}.$$

Comme G_X est dérivable en 1, X est d'espérance finie et

$$\mathbf{E}(X) = G'_X(1) = \mathrm{e} - 1.$$

De même G_X est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et pour $t \in \mathbb{R}^*$,

$$\begin{aligned} G_X''(t) &= \frac{(2te^t + t^2e^t - e^t - te^t + e^t)t^2 - 2t(t^2e^t - te^t + e^t - 1)}{t^4} \\ &= \frac{t^3e^t - t^2e^t + 2te^t - 2e^t + 2}{t^3}. \end{aligned}$$

Comme G_X est deux fois dérivable en 1, X^2 est d'espérance finie, et

$$\mathbf{E}(X(X-1)) = G_X''(1) = 2.$$

Par suite $\mathbf{E}(X^2) = 2 + \mathbf{E}(X) = 1 + e$ et

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2 = e + 1 - (e-1)^2 = -e^2 + 3e.$$

On pouvait également utiliser le théorème de transfert pour calculer $\mathbf{E}(X-1)$ et $\mathbf{E}(X^2 - X)$.

Exercice 15.4 : Nombre de poussins

Une poule pond N oeufs, où N suit une loi de Poisson de paramètre λ. Chaque oeuf éclôt avec probabilité p, et les éclosions sont des événements indépendants. On note K la variable aléatoire donnant le nombre de poussins.
Calculer la fonction génératrice de K puis reconnaître la loi de K.

Le calcul de le fonction génératrice se fait via le calcul des $\mathbf{P}(K = k)$ pour $k \in \mathbb{N}$. On décompose ce calcul avec la formule des probabilités totales.

Pour k et $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(K = k|N = n) = 0$ si $k > n$ (il ne peut y avoir plus de poussins que d'oeufs) et vaut $\binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ si $k \leqslant n$, où $q = 1 - p$.
En effet, s'il y a n oeufs, la loi du nombre de poussins est la somme de n variables de Bernoulli indépendantes (les variables représentant les éclosions ou non de chacun des n oeufs) donc est une loi binomiale.

Attention à ne pas oublier le coefficient binomial, surtout si l'on calcule directement cette probabilité : il faut que k oeufs éclosent (terme p^k) que $n - k$ n'éclosent pas (terme q^{n-k}) et il faut choisir parmi les n lesquels des k oeufs vont éclore (terme $\binom{n}{k}$).

Pour $x \in]-1,1[$, on a donc

$$\begin{aligned} G_K(x) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(K=k)x^k = \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(K=k|N=n)\mathbf{P}(N=n)x^k \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}x^k = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(px)^k q^{n-k} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}(px+q)^n = \mathrm{e}^{-\lambda}\mathrm{e}^{\lambda(px+q)} = \mathrm{e}^{\lambda(px+q-1)} \\ &= \mathrm{e}^{\lambda p(x-1)}. \end{aligned}$$

Notons que l'inversion des deux signes sommes est justifiée puisqu'en faisant le même calcul avec $|x|$ au lieu de x, on obtient que la famille $\left(\binom{n}{k} p^k q^{n-k}\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}x^k\right)_{0\leqslant k\leqslant n\leqslant +\infty}$ est sommable.
On reconnaît ici l'expression de la fonction génératrice d'une variable aléatoire de Poisson de paramètre λp, donc K suit une loi de Poisson de paramètre λp.

Exercice 15.5 : Loi conjointe et lois marginales

Soit X et Y deux variables aléatoires sur un même espace probabilisé à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que la loi conjointe de (X,Y) vérifie

$$\forall (j,k) \in \mathbb{N}^2, \quad \mathbf{P}(X=j, Y=k) = a(j+k)2^{-j-k}.$$

1. Quelle est la valeur de a ?
2. Déterminer les lois marginales de X et Y.
3. X et Y sont elles indépendantes ?
4. Calculer $\mathbf{P}(X=Y)$.

1. On détermine la valeur de a en utilisant la relation $\sum_{(j,k)\in\mathbb{N}^2} \mathbf{P}(X=j,Y=k) = 1$.
Pour calculer cette somme, on regroupe les termes à $j+k$ constant (au vu de la formule donnant $\mathbf{P}(X=j,Y=k)$) et on va reconnaître la dérivée seconde d'une série géométrique.

On a

$$1 = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{n} \mathbf{P}(X=j, Y=n-j) = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{n} an2^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} an(n+1)2^{-n},$$

la série considérée étant convergente (c'est un $o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ par croissance comparée). On note f la somme de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ sur $]-1,1[$. On sait que

$$\forall x \in]-1,1[, \quad f(x) = \frac{1}{1-x},$$

et comme on peut dériver terme à terme,

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n+1)x^{n-1},$$

ce qui montre que la relation plus haut se réécrit $1 = \frac{a}{2} f''\left(\frac{1}{2}\right)$. D'autre part, on calcule

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} \qquad \text{puis} \qquad f''(x) = -\frac{(-2)(1-x)}{(1-x)^4} = \frac{2}{(1-x)^3}$$

et $1 = 8a$, donc $a = \frac{1}{8}$.

2. Pour déterminer $\mathbf{P}(X = j)$ à $j \in \mathbb{N}$ fixé, il suffit de sommer les $\mathbf{P}(X = j, Y = k)$ pour tous les $k \in \mathbb{N}$. On retrouve donc un calcul de série.

Pour $j \in \mathbb{N}$, on a (avec les notations de la question précédente)

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X = j) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = j, Y = k) = \sum_{k=0}^{+\infty} a(j+k)2^{-j-k} \\ &= \frac{j}{8 \times 2^j} \sum_{k=0}^{+\infty} 2^{-k} + \frac{1}{8 \times 2^j} \sum_{k=0}^{+\infty} k2^{-k} \\ &= \frac{j}{4 \times 2^j} + \frac{1}{16 \times 2^j} f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{j}{4 \times 2^j} + \frac{1}{4 \times 2^j} = \frac{j+1}{2^{j+2}}. \end{aligned}$$

On montre de même que pour $k \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(Y = k) = \frac{k+1}{2^{k+2}}$.

Les lois de X et Y ne permettent pas de retrouver la loi conjointe (X, Y).

3. Si les deux variables aléatoires étaient indépendantes, on aurait

$$\mathbf{P}(X = 0, Y = 0) = 0 = \mathbf{P}(X = 0)\mathbf{P}(Y = 0).$$

Or $\mathbf{P}(X = 0, Y = 0) = 0$ mais $\mathbf{P}(X = 0)$ et $\mathbf{P}(Y = 0)$ sont non nulles.

Pour $(j, k) = (0, 0)$, on a

$$\mathbf{P}(X = j, Y = k) = 0 \neq \frac{1}{16} = \mathbf{P}(X = j)\mathbf{P}(Y = k),$$

donc X et Y ne sont pas indépendantes.

4. La probabilité cherchée s'obtient en sommant les $\mathbf{P}(X = k, Y = k)$ pour $k \in \mathbb{N}$, ce qui donne encore un calcul de série.

On a, avec les notations du 1,

$$\mathbf{P}(X = Y) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = k, Y = k) = \sum_{k=0}^{+\infty} a(2k)2^{-2k} = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{+\infty} k4^{-k}$$
$$= \frac{1}{16} f'\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{9}.$$

Exercice 15.6 : Temps de jeu à la roulette

Un joueur arrive au casino avec une fortune de $k \in \{0, \dots, N\}$ et joue à la roulette. Il a une probabilité de gagner de $p \in]0, 1[$ 1 euro à chaque partie, en misant un euro.
Le joueur a décidé qu'il s'arrêterait de jouer s'il a gagné tout l'argent N disponible dans le casino, ou lorsqu'il n'aura plus d'argent. On note t_k la variable aléatoire représentant le temps de jeu du joueur (presque sûrement fini d'après l'exercice **14.2**).
1. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(t_k > N(n+1)) \leqslant \mathbf{P}(t_k > Nn)(1 - p^N)$.
En déduire que t_k admet une espérance qu'on notera T_k dans la suite.
2. Justifier la relation $T_k = p(1 + T_{k+1}) + q(1 + T_{k-1})$, $k \in \{1, \dots, N-1\}$, avec $q = 1 - p$.
3. En déduire que

$$T_k = \frac{1}{q-p}\left[k - N\left(\frac{1 - (\frac{q}{p})^k}{1 - (\frac{q}{p})^N}\right)\right] \text{ si } p \neq \frac{1}{2}$$
$$\text{et} \qquad T_k = k(N-k) \text{ si } p = \frac{1}{2}.$$

1. Pour que le temps de jeu soit plus grand que $N(n+1)$, il faut qu'il soit plus grand que Nn et que les parties $nN + 1$ à $N(n+1)$ donnent une fortune restant entre 0 et N.
La majoration demandée est de montrer que la probabilité de ce dernier événement est plus petite que $(1 - p^N)$, c'est-à-dire que l'événement contraire a une probabilité plus grande que p^N, la probabilité de gagner N fois d'affilée.
Pour écrire ceci rigoureusement, il faut utiliser l'indépendance des parties, en distinguant les cas de résultats possibles au bout de nN parties.

Notons S la fortune du joueur à l'instant nN. Les parties étant indépendantes les unes des autres, pour $x \in \{1, \dots, N-1\}$, on a

$$\mathbf{P}(t_k > N(n+1) \text{ et } S = x) = \mathbf{P}(t_k > Nn \text{ et } S = x)\mathbf{P}(A_x),$$

où A_x désigne l'événement « Les parties $Nn+1$ à $N(n+1)$ donnent des résultats tels que le joueur n'atteint ni une fortune de 0, ni une fortune de N à partir de $S = x$. »
Si le joueur gagne les parties $Nn + 1$ à $Nn + (N - x)$, l'événement $\overline{A_x}$ est réalisé, on a donc, par croissance de $\mathbf{P}$, $\mathbf{P}(\overline{A_x}) \geqslant p^{N-x} \geqslant p^N$ (car $p \in]0, 1[$).
Ainsi $\mathbf{P}(A_x) \leqslant 1 - p^N$ et il vient

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(t_k > n(N+1)) &= \sum_{x=1}^{N-1} \mathbf{P}(t_k > N(n+1) \text{ et } S = x) \\
&= \sum_{x=1}^{N-1} \mathbf{P}(t_k \geqslant Nn \text{ et } S = x)\mathbf{P}(A_x) \\
&\leqslant \sum_{x=1}^{N-1} \mathbf{P}(t_k > Nn \text{ et } S = x)(1 - p^N) \\
&\leqslant \mathbf{P}(t_k > Nn)(1 - p^N).
\end{aligned}$$

La relation précédente donne alors une majoration de $\mathbf{P}(t_k > Nn)$ par le terme général d'une série géométrique convergente (par récurrence triviale). Il faut alors relier l'espérance de t_k avec la série de terme général $\mathbf{P}(t_k > n)$. C'est un calcul très classique.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on montre, par récurrence aisée, que $\mathbf{P}(t_k > Nn) \leqslant (1 - p^N)^n$.
Pour $l \in \mathbb{N}$, si l est entre Nn et $N(n+1) - 1$, on a clairement

$$\mathbf{P}(t_k > l) \leqslant \mathbf{P}(t_k > Nn),$$

ainsi :

$$0 \leqslant \sum_{l=Nn}^{N(n+1)-1} \mathbf{P}(t_k > l) \leqslant N(1 - p^N)^n,$$

terme général d'une série convergente (car géométrique de raison $1 - p^N$, avec $1 - p^N \in]0, 1[$).
La série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{l=Nn}^{N(n+1)-1} \mathbf{P}(t_k > l)$$

converge donc absolument (puisque c'est une série à termes positifs) et $\sum \mathbf{P}(t_k > l)$ converge (par sommation par paquets).
Par suite, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{l=0}^{+\infty} \mathbf{P}(t_k > l) &= \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{c=l+1}^{+\infty} \mathbf{P}(t_k = c) = \sum_{c=1}^{+\infty} \sum_{l=0}^{c-1} \mathbf{P}(t_k = c) \\
&= \sum_{c=1}^{+\infty} c\mathbf{P}(t_k = c)
\end{aligned}$$

l'inversion des deux signes sommes étant possible car il s'agit d'une famille de réels positifs sommable (la première série converge). Ainsi $\sum c\mathbf{P}(t_k = c)$ converge (absolument) et t_k admet une espérance.

Il est important de bien retenir cette dernière formule, qui relie l'espérance d'une variable aléatoire X aux $\mathbf{P}(X > n)$ car elle est extrêmement classique.

2. La relation demandée relie l'espérance de t_k à celle de t_{k+1} et t_{k-1}.
On étudie l'issue de la première partie : si le joueur gagne, on est ramené au problème avec un montant initial de $k+1$, s'il perd, avec un montant initial de $k-1$. Pour pouvoir appliquer la formule des probabilités totales, il faut se ramener aux événements $t_k = n$, $n \in \mathbb{N}$.

Il faut toujours se ramener à des événements pour pouvoir utiliser les propriétés liées au conditionnement. On utilise alors la définition de l'espérance.

Notons G l'événement : « Le joueur gagne la première partie. »
Pour $k \in \{1, \ldots, N-1\}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a, par la formule des probabilités totales

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(t_k = n) &= \mathbf{P}(t_k = n|G)P(G) + \mathbf{P}(t_k = n|\overline{G})P(\overline{G})\\ &= \mathbf{P}(t_{k+1} = n-1)p + \mathbf{P}(t_{k-1} = n-1)q.\end{aligned}$$

Comme $\mathbf{P}(t_k = 0) = 0$ puisque k est entre 1 et $N-1$, on en déduit que

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(t_k) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\mathbf{P}(t_k = n) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n[\mathbf{P}(t_{k+1} = n-1)p + \mathbf{P}(t_{k-1} = n-1)q]\\ &= p\sum_{n=1}^{+\infty} n\mathbf{P}(t_{k+1} = n-1) + q\sum_{n=1}^{+\infty} n\mathbf{P}(t_{k-1} = n-1)\\ &= p\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\mathbf{P}(t_{k+1} = n) + q\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\mathbf{P}(t_{k-1} = n)\\ &= p\mathbf{E}(t_{k+1}+1) + q\mathbf{E}(t_{k-1}+1) = p(1+T_{k+1}) + q(1+T_{k-1})\end{aligned}$$

d'après le théorème de transfert, toutes les séries étant convergentes (puisque $\mathbf{E}(t_k)$ est finie d'après la première question).

3. Les T_k suivent une équation de récurrence double, mais pas tout à fait linéaire (il y a un $p+q=1$ qui nous ennuie).

L'idée est d'abord de modifier légèrement la définition de T_k pour retrouver une équation de récurrence double linéaire classique. On va ajouter à T_k un terme de la forme αk (le fait d'ajouter 1 à chaque fois rappelle une suite arithmétique).

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour $k \in \{0, \ldots, N\}$, on pose $u_k = T_k + k\alpha$. Si $1 \leqslant k \leqslant N-1$, on a

$$\begin{aligned} &pu_{k+1} + qu_{k-1} - u_k \\ &\qquad = pT_{k+1} + p\alpha(k+1) + qT_{k-1} + q\alpha(k-1) - T_k - \alpha k \\ &\qquad = p\alpha k + p\alpha + q\alpha k - q\alpha - 1 - \alpha k = p\alpha - q\alpha - 1 \end{aligned}$$

Plaçons-nous donc dans le cas où $p \neq q$. On peut alors poser $\alpha = \dfrac{1}{p-q}$, de sorte que $pu_{k+1} + qu_{k-1} - u_k = 0$.
L'équation caractéristique associée est $px^2 - x + q = 0$, de discriminant

$$1 - 4pq = 1 - 4p(1-p) = 4p^2 - 4p + 1 = (1-2p)^2$$

(non nul car $p \neq q$). Les solutions de cette équation sont donc

$$\frac{1 + (1-2p)}{2p} = \frac{1-p}{p} = \frac{q}{p} \text{ et } \frac{1-(1-2p)}{2p} = 1.$$

On a donc $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $k \in \{0, \ldots, N\}$,

$$u_k = \lambda + \mu \left(\frac{q}{p}\right)^k.$$

Comme $u_0 = T_0 = 0$ et $u_N = T_N + \alpha N = \dfrac{N}{p-q}$, (λ, μ) est solution du système

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda + \mu \left(\dfrac{q}{p}\right)^N = \dfrac{N}{p-q} \end{array} \right. .$$

En effectuant $L_2 - L_1$, on obtient $\mu \left(\left(\dfrac{q}{p}\right)^N - 1 \right) = \dfrac{N}{p-q}$ donc

$$\mu = \frac{N}{(p-q)\left(\left(\frac{q}{p}\right)^N - 1\right)} \quad \text{et} \quad \lambda = -\mu = -\frac{N}{(p-q)\left(\left(\frac{q}{p}\right)^N - 1\right)}.$$

Ainsi, pour $k \in \{0, \ldots, N\}$, il vient :

$$T_k = U_k - \alpha k = \frac{1}{p-q}\left(N \frac{-1 + \left(\frac{q}{p}\right)^k}{-1 + \left(\frac{q}{p}\right)^N} - k \right) = \frac{1}{q-p}\left(k - N \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^k}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^N} \right).$$

Reste à traiter le cas $p = q$. On ne peut alors pas trouver de α simplifiant la relation précédente (ceci vient du fait que 1 est solution double de l'équation caractéristique). À la manière des équations différentielles, on cherche alors v_k sous la forme $T_k + \alpha k^2$.

Supposons maintenant $p = q$.
Pour $k \in \{0, \ldots, N\}$, on pose maintenant $v_k = T_k + \alpha k^2$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$ à déterminer. On a alors

$$\begin{aligned} &p v_{k+1} + q v_{k-1} - v_k \\ &\quad = \frac{1}{2} T_{k+1} + \frac{\alpha}{2}(k+1)^2 + \frac{1}{2} T_{k-1} + \frac{\alpha}{2}(k-1)^2 - T_k - \alpha k^2 \\ &\quad = \frac{\alpha}{2}(k^2 + 2k + 1 + k^2 - 2k + 1) - 1 - \alpha k^2 = \alpha - 1 \end{aligned}$$

et l'on pose $\alpha = 1$ pour avoir $\frac{1}{2} v_{k+1} - v_k + \frac{1}{2} v_{k-1} = 0$, c'est-à-dire

$$v_{k+1} - 2v_k + v_{k-1} = 0.$$

L'équation caractéristique est $x^2 - 2x + 1 = 0$, admet pour solution double $x = 1$, donc on a $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $k \in \{0, \ldots, N\}$, $v_k = \lambda + \mu k$. Comme $v_0 = T_0 = 0$ et $v_N = T_N + \alpha N^2 = N^2$, on a $\lambda = 0$ et $\mu = N$. Ainsi, pour $k \in \{0, \ldots, N\}$, on a

$$T_k = v_k - k^2 = Nk - k^2 = k(N - k).$$

C'est pour cette raison que les casinos existent : même si un joueur arrive avec une fortune initiale k très petite, son temps de jeu est (si $p = q$) en moyenne égal à $k(N - k)$, donc très grand par rapport à k.

Exercice 15.7 : Le paradoxe de l'inspection

Dans une usine, une machine a, chaque jour, une probabilité $p \in]0, 1[$ de tomber en panne. Chaque fois qu'elle tombe en panne, un technicien vient la réparer dans la soirée.
On note $q = 1 - p$, X_n la variable aléatoire qui vaut 1 si la machine est tombée en panne le n-ième jour, 0 sinon, et, pour $i \in \mathbb{N}^*$, T_i le jour où la machine est tombée en panne pour la i-ème fois. Les variables aléatoires X_n sont supposées indépendantes.
On pose enfin $\tau_1 = T_1$ puis pour $k \geqslant 2$, $\tau_k = T_k - T_{k-1}$ le nombre de jours écoulés entre deux pannes consécutives. On note enfin N_n le nombre de pannes survenues entre les jours 0 et n.
1. Déterminer la loi de τ_1 et montrer que les τ_k, $k \in \mathbb{N}^*$, sont indépendantes, de même loi que τ_1.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la loi conjointe de $(T_1, \ldots, T_n)$.
3. Un inspecteur vient le n-ième jour, $n \in \mathbb{N}^*$, et reste jusqu'à la prochaine panne. Calculer la loi des variables aléatoires $V_n = T_{N_n+1} - n$ et $U_n = n - T_{N_n}$.

1. Pour montrer que des lois sont indépendantes, il faut vérifier la définition du cours. On calcule les probabilités des événements $\tau_i = n_i$ et $(\tau_1, \dots, \tau_l) = (n_1, \dots, n_l)$ en utilisant l'indépendance des variables aléatoires X_k.

> L'indépendance des variables deux à deux n'implique pas l'indépendance mutuelle. Il faut bien prendre l variables aléatoires !

Soient $l \in \mathbb{N}^*$ et $n_1, \dots, n_l \in \mathbb{N}$, et notons $q_k = n_1 + \cdots + n_k$ pour k entre 1 et l.
L'événement $A = (\tau_1 = n_1, \dots, \tau_l = n_l)$ correspond à

$$X_{q_k+1} = \ldots = X_{q_k+n_{k+1}-1} = 0 \quad \text{et} \quad X_{q_k+n_{k+1}} = 1$$

pour k entre 0 et $l-1$.
Les événements $X_1, \dots, X_{q_l}$ étant indépendants, et A correspondant au succès de l d'entre eux, on a donc

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(\tau_1 = n_1, \dots, \tau_l = n_l) = \prod_{k=0}^{l-1} ((1-p)^{n_{k+1}-1}\, p) = (1-p)^{q_l - l} p^l.$$

D'autre part, pour $i \in \{1, \dots, l\}$, l'événement $\tau_i = n_i$ correspond à

$$X_{T_{i-1}+1} = 0, \dots, X_{T_{i-1}+n_i-1} = 0 \quad \text{et} \quad X_{T_{i-1}+n_i} = 1.$$

Avec l'indépendance des X_n, on a donc $\mathbf{P}(\tau_i = n_i) = (1-p)^{n_i-1}p$. Ainsi

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\tau_1 = n_1, \dots, \tau_l = n_l) &= (1-p)^{q_l-l}p^l = (1-p)^{(n_1-1)+\cdots+(n_l-1)}p^l \\ &= \prod_{i=1}^{l} \left[(1-p)^{n_i-1}p\right] = \prod_{i=1}^{l} \mathbf{P}(\tau_i = n_i)\end{aligned}$$

donc $\tau_1, \dots, \tau_n$ sont indépendants.
On a vu plus haut que pour tout $i \in \mathbb{N}^*$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbf{P}(\tau_i = n) = (1-p)^{n-1}p.$$

Les τ_i ont donc tous même loi que τ_1, la loi géométrique de paramètre p.

2. Par définition, la loi conjointe d'un n-uplet $(T_1, \dots, T_n)$ est donnée par les probabilités des événements $\mathbf{P}(T_1 = k_1, \dots, T_n = k_n)$.

Soit $(k_1, \dots, k_n) \in (\mathbb{N}^*)^n$. Notons que s'il existe $i \in \{1, \dots, n-1\}$ tel que $k_{i+1} \leqslant k_i$, $\mathbf{P}(T_1 = k_1, \dots, T_n = k_n) = 0$ (la suite des T_i étant strictement croissante).

Supposons donc $k_1 < \cdots < k_n$. On a alors, avec la question précédente :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(T_1 = k_1, \ldots, T_n = k_n) &= P(\tau_1 = k_1, \tau_2 = k_2 - k_1, \ldots, \tau_n = k_n - k_{n-1}) \\ &= \prod_{i=1}^{n} \mathbf{P}(\tau_i = k_i - k_{i-1}) \\ &= \prod_{i=1}^{n} \left[(1-p)^{k_i - k_{i-1} - 1} p\right] \\ &= (1-p)^{k_n - n} p^n\end{aligned}$$

par télescopage, et où l'on a noté $k_0 = 0$ pour simplifier.

Il est parfaitement logique que le résultat ne dépende que de k_n : comme les X_k sont indépendants, la probabilité cherchée est tout simplement la probabilité qu'il y ait eu n pannes avant l'instant k_n.

3. Comme toujours, il s'agit de calculer les $\mathbf{P}(U_n = k)$ et $\mathbf{P}(V_n = k)$, pour $k \in \mathbb{N}^*$.

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, l'événement $U_n = k$ correspond à $X_n = 0, \ldots, X_{n-k+1} = 0$ et $X_{n-k} = 1$. On a donc $\mathbf{P}(U_n = k) = (1-p)^{k-1}p$ (par l'indépendance des X_n). U_n suit donc une loi géométrique de paramètre p.
Pour $k \in \mathbb{N}^*$, l'événement $V_n = k$ correspond à $X_{n+1} = 0, \ldots, X_{n+k-1} = 0$ et $X_{n+k} = 1$. On a donc $\mathbf{P}(V_n = k) = (1-p)^{k-1}p$. V_n suit donc également une loi géométrique de paramètre p.

Comme $\tau_{N_n+1} = U_n + V_n$, et comme U_n et V_n sont indépendantes de même loi que T_1, la durée moyenne entre les deux pannes qui encadrent n est plus grande que la durée moyenne entre deux pannes. C'est le paradoxe de l'inspection. L'inspecteur, qui arrive à l'instant n dans l'intention de mesurer la durée moyenne entre deux pannes, enregistre un nombre en général trop grand.

Exercice 15.8 : Un jeu de pile ou face

On lance une infinité de fois une pièce ayant une probabilité $p \in]0,1[$ de donner pile, les lancers étant mutuellement indépendants. On note N le nombre de lancers nécessaires pour donner pile. On lance ensuite N fois la même pièce et on note X le nombre piles obtenus.
1. Déterminer la loi de N puis la loi de X.
2. Calculer la fonction génératrice de X.
3. En déduire $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{V}(X)$.

1. N suit une loi géométrique de paramètre p (premier succès dans une suite d'expériences de Bernoulli indépendantes). Ensuite, lorsqu'on connaît la valeur n de N, X suit une loi binomiale de paramètres n et p (nombre de succès dans n expériences de Bernoulli indépendantes), ce qui permet de déterminer la loi conditionnelle de X sachant $N = n$.
On utilise ensuite la formule des probabilités totales pour déterminer la loi de X.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si l'on sait que $N = n$, X suit une loi binomiale de paramètres n et p (nombre de succès dans n expériences de Bernoulli), donc pour $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\mathbf{P}(X = k | N = n) = \begin{cases} 0 \text{ si } k > n \\ \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \text{ sinon.} \end{cases}$$

N suit une loi géométrique de paramètre p (premier succès dans une suite d'expériences de Bernoulli) donc en notant $q = 1 - p$, par la formule des probabilités totales, il vient, si $k \neq 0$,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X = k) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(X = k, N = n)\mathbf{P}(N = n) = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} p q^{n-1} \\ &= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{k!(n-k)!} p^{k+1} q^{2n-k-1} \\ &= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} p^{k+1} q^{2n-k-1} \\ &= \frac{p^{k+1} q^{k-1}}{k!} \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)(q^2)^{n-k} \\ &= \frac{p^{k+1} q^{k-1}}{k!} f^{(k)}(q^2) \end{aligned}$$

où $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ (puisque $q^2 \in]0,1[$). On a donc

$$\mathbf{P}(X=k) = \frac{p^{k+1}q^{k-1}}{k!} \times \frac{k!}{(1-q^2)^{k+1}} = \frac{p^{k+1}q^{k-1}}{(1-q)^{k+1}(1+q)^{k+1}}$$
$$= \frac{q^{k-1}}{(1+q)^{k+1}}.$$

D'autre part

$$\mathbf{P}(X=0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(X=0|N=n)\mathbf{P}(N=n) = \sum_{n=1}^{+\infty} q^n p q^{n-1} = \frac{p}{q}\sum_{n=1}^{+\infty} q^{2n}$$
$$= \frac{p}{q} \times \frac{q^2}{1-q^2} = \frac{pq}{(1-q)(1+q)} = \frac{q}{1+q}.$$

2. Le calcul de la fonction génératrice de X est un autre calcul de série.

Soit $x \in [0,1]$, avec la question précédente, on calcule

$$G_X(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k \mathbf{P}(X=k) = \frac{q}{1+q} + \sum_{k=1}^{+\infty} x^k \frac{q^{k-1}}{(1+q)^{k+1}}$$
$$= \frac{q}{1+q} + \frac{1}{q(1+q)} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{qx}{1+q}\right)^k = \frac{q}{1+q} + \frac{1}{q(1+q)} \times \frac{\frac{qx}{1+q}}{1-\frac{qx}{1+q}}$$
$$= \frac{q}{1+q} + \frac{x}{(1+q)(1+q(1-x))}$$

3. On détermine l'espérance et la variance de X grâce aux dérivées successives de G_X.

Comme G_X est deux fois dérivable en 1, X^2 est d'espérance finie (et en particulier X est d'espérance finie). Pour $x \in [0,1]$, on calcule

$$G'_X(x) = \frac{1}{1+q} \times \frac{1+q(1-x)+qx}{(1+q(1-x))^2} = \frac{1}{(1+q(1-x))^2}$$

puis

$$G''_X(x) = \frac{2q}{(1+q(1-x))^3}$$

Ainsi, $\mathbf{E}(X) = G'_X(1) = 1$ et $\mathbf{E}(X(X-1)) = G''_X(1) = 2q$. On en déduit que

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2 = 2q + \mathbf{E}(X) - 1 = 2q.$$

Exercice 15.9 : Processus de Galton-Watson

On considère une famille $(X_{n,p})_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ de variables indépendantes de même loi X et $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de variables aléatoires définie par récurrence par

$$Z_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad Z_{n+1} = \sum_{j=1}^{Z_n} X_{j,n+1}.$$

Concrètement $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ modélise l'évolution d'une population dont, à chaque instant n, les individus meurent en donnant naissance (de manière indépendante) à des nombres d'enfants suivant la loi X.
On note φ la fonction génératrice de X, on suppose que X admet une espérance finie que l'on note $m = \mathbf{E}[X]$ et que $\mathbf{P}(X = 0) + \mathbf{P}(X = 1) < 1$.
1. Montrer que φ est strictement croissante, dérivable et que φ' est strictement croissante sur $[0, 1]$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note φ_n la fonction génératrice de Z_n (définie sur $[0, 1]$). Montrer que $\varphi_{n+1} = \varphi_n \circ \varphi$. En déduire $\mathbf{E}(Z_n)$.
3. Soit T la variable aléatoire représentant le plus petit entier n (ou $+\infty$ si cet entier n'existe pas) tel que $Z_n = 0$ (extinction de la population). Montrer que $\mathbf{P}(T < +\infty)$ est le plus petit point fixe de φ.
4. Montrer que la population s'éteint presque sûrement si et seulement si $m \leqslant 1$.

1. Par définition la fonction génératrice est une série entière définie sur $[0, 1]$. Elle est donc dérivable sur son intervalle ouvert de convergence. La dérivabilité en 1 équivaut à l'existence d'une espérance finie. On étudie ensuite la stricte croissante via le signe de la dérivée et de la dérivée seconde.

φ est une série entière de rayon de convergence supérieur à 1. Elle est définie sur $[0, 1]$ et est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[0, 1[$. Comme X est d'espérance finie, sa fonction génératrice φ est dérivable en 1. Ainsi, φ est définie et dérivable sur $[0, 1]$. Pour $x \in [0, 1[$, on a (en dérivant terme à terme sur l'intervalle ouvert de convergence) :

$$\varphi'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\mathbf{P}(X = n)x^{n-1} > 0 \text{ et } \varphi''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\mathbf{P}(X = n)x^{n-2}$$

sinon $\mathbf{P}(X = n) = 0$ pour tout $n \geqslant 2$ (ou 1), et $\mathbf{P}(X = 0) + \mathbf{P}(X = 1) = 1$, ce qui est exclu.
φ et φ' sont donc strictement croissantes sur $[0, 1]$.

2. Les fonctions φ_n et φ_{n+1} étant définies sur $[0, 1]$, il faut d'abord vérifier que $\varphi([0, 1]) \subset [0, 1]$ pour que la formule ait un sens. On fait ensuite le calcul de la série entière définissant $\varphi_{n+1}(t)$ pour $t \in [0, 1]$. Les $\mathbf{P}(Z_{n+1} = p)$ se calculent en fonction des $\mathbf{P}(Z_n = k)$ via la formule des probabilités totales.

Comme φ est strictement croissante sur $[0,1]$, avec $\varphi(0) = \mathbf{P}(X_1 = 0) \geqslant 0$ et $\varphi(1) = 1$, $\varphi([0,1]) \subset [0,1]$. On peut donc considérer la composée $\varphi_n \circ \varphi$.
Pour $t \in [0,1]$, on calcule, par la formule des probabilités totales et sous réserve de justifications :

$$\begin{aligned}\varphi_{n+1}(t) &= \sum_{p=0}^{+\infty} \mathbf{P}(Z_{n+1} = p)t^p = \sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(Z_{n+1} = p | Z_n = k)\mathbf{P}(Z_n = k)t^p \\ &= \sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X_{n,1} + \cdots + X_{n,k} = p)\mathbf{P}(Z_n = k)t^p \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(Z_n = k) \sum_{p=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X_{n,1} + \cdots + X_{n,k} = p)t^p \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(Z_n = k)\varphi_{n,k}(t)\end{aligned}$$

où $\varphi_{n,k}$ est la fonction génératrice de $X_{n,1} + \cdots + X_{n,k}$, sous réserve de justification de l'inversion des deux signes sommes.
Comme $X_{n,1}, \ldots, X_{n,k}$ est une suite indépendantes de variables aléatoires de même loi que X, $\varphi_{n,k} = \varphi^k$. On en déduit que

$$\varphi_{n+1}(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(Z_n = k)\varphi(t)^k = \varphi_n(\varphi(t)).$$

Il y a des justifications à apporter pour pouvoir intervertir les deux séries (sur k et sur p).

Il reste à justifier l'interversion des deux signes sommes dans le calcul plus haut. Il faut montrer que la famille $(\mathbf{P}(X_{n,1} + \cdots + X_{n,k} = p)\mathbf{P}(Z_n = k)t^p)_{(n,k)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable (pour intervertir les deux signes sommes). Or c'est une famille de réels positifs dont la somme vaut $\varphi_n(\varphi(t)) < +\infty$, elle est donc sommable.

Pour en déduire l'espérance de Z_n, il faut justifier la dérivabilité de φ_n en 1 et calculer $\varphi_n'(1)$. La justification vient aisément de la dérivabilité de φ en 1, et par récurrence sur n. Pour la valeur, on a $\mathbf{E}(Z_{n+1}) = \varphi_{n+1}'(1) = \varphi'(1)\varphi_n'(\varphi(1)) = m\mathbf{E}(Z_n)$, dont on déduit que $\mathbf{E}(Z_n) = m^n$.

Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété H_n : « Z_n admet une espérance finie qui vaut m^n. »

- Comme $Z_0 = 1$, Z_0 admet une espérance finie qui vaut $1 = m^0$, donc on a H_0.

- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que H_n. Par hypothèse de récurrence, Z_n admet une espérance finie qui vaut m^n, donc φ_n est dérivable en $1 = \varphi(1)$, de dérivée m^n. Comme φ est dérivable en 1 (car X admet une espérance finie), $\varphi_{n+1} = \varphi_n \circ \varphi$ est dérivable en 1 comme composée de fonctions qui le sont. Ainsi Z_{n+1} admet une espérance finie, qui vaut :
$$\mathbf{E}(Z_{n+1}) = \varphi'_{n+1}(1) = \varphi'(1)\varphi'_n(\varphi(1)) = m\varphi'_n(1) = m\mathbf{E}(Z_n) = m^{n+1}$$
donc on a H_{n+1}.

En conclusion, $\forall n \in \mathbb{N}$, H_n.

3. L'événement $\{T < +\infty\}$ est la réunion des $\{Z_n = 0\}$ pour $n \in \mathbb{N}$. C'est une réunion croissante, on appliquera donc la continuité croissante de $\mathbf{P}$.
De plus $\mathbf{P}(Z_n = 0) = \varphi_n(0) = \varphi^n(0)$ (par la question précédente) si $n \geqslant 1$. Ainsi $\mathbf{P}(T < +\infty)$ est la limite des $\mathbf{P}(Z_n = 0) = \varphi^n(0)$, donc la limite d'une suite récurrente définie via la fonction φ, donc un point fixe de φ.

On a $\{T < +\infty\} = \cup_{n\in\mathbb{N}}\{Z_n = 0\}$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $\{Z_n = 0\} \subset \{Z_{n+1} = 0\}$: si la population est éteinte à l'instant n elle l'est encore à l'instant $n+1$. Par continuité croissante de $\mathbf{P}$, on a (sous réserve d'existence de la limite),
$$\mathbf{P}(T < +\infty) = \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(Z_n = 0) = \lim_{n\to+\infty} \varphi_n(0) = \lim_{n\to+\infty} \varphi^n(0)$$
où $\varphi^n = \varphi \circ \cdots \circ \varphi$, et puisque $\varphi_n(0) = \varphi^n(0)$ par récurrence aisée sur $n \in \mathbb{N}^*$ à partir de la question précédente.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = (\varphi^n(0))_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifie l'équation de récurrence
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \varphi(u_n).$$
Comme φ est croissante, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est monotone. On a $u_1 = \varphi(0) \geqslant 0$, donc en appliquant φ, qui est croissante, $u_2 \geqslant u_1$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc croissante. Comme φ est à valeurs dans $[0, 1]$, elle est majorée par 1. Par le théorème de la limite monotone, cette suite converge.
Sa limite l est nécessairement un point fixe de φ (puisque φ est continue, car dérivable, sur $[0, 1]$). De plus, si a est un point fixe de φ, en partant de $u_0 = 0 \leqslant a$, on montre par récurrence aisée sur $n \in \mathbb{N}$ que $u_n \leqslant a$. Ainsi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par tout point fixe de φ.
En conclusion, $\mathbf{P}(T < +\infty) = \lim_{n\to+\infty} u_n$ est le plus petit point fixe de φ.

4. On sait que 1 est un point fixe de φ. Il faut montrer que c'est le plus petit point fixe de φ si et seulement si $m \leqslant 1$. On traite séparément les deux implications.

► **Sens direct :**
Dans ce sens, on suppose que 1 est le plus petit point fixe de φ, et on doit montrer que $m \leqslant 1$. La fonction $h : x \mapsto \varphi(x) - x$ ne s'annule donc qu'en 1, et comme $h(0) > 0$, elle est strictement positive sur $]0, 1[$. Le graphe de la fonction φ restant au-dessus de la droite $y = x$ sur $[0, 1]$, ses tangentes sont de coefficient directeur plus petit que 1.

Supposons que le plus petit point fixe de φ soit 1. La fonction $h : x \mapsto \varphi(x) - x$ est continue (car φ l'est) sur $[0, 1]$ et ne s'annule qu'en 1. Par le théorème des valeurs intermédiaires, elle est de signe strict constant sur $[0, 1[$.
On a $h(0) = \varphi(0) \geqslant 0$, donc ce signe est strictement positif.
On a donc $\varphi(x) > x$ pour $x \in [0, 1[$, puis $1 - \varphi(x) < 1 - x$ et $\dfrac{\varphi(1) - \varphi(x)}{1 - x} < 1$ en divisant par $1 - x > 0$. En passant cette inégalité à la limite $x \to 1$, on trouve $m = \varphi'(1) \leqslant 1$.

► **Sens réciproque :**
On montre ce sens par contraposée, en montrant que si φ possède un point fixe $a < 1$, alors $m > 1$. On utilise pour ce faire le théorème des accroissements finis entre les deux points fixes.

Supposons que φ admette un point fixe $a < 1$. Comme φ est continue sur $[a, 1]$, dérivable sur $]a, 1[$, on a $c \in]a, 1[$ tel que $(\varphi(1) - \varphi(a)) = \varphi'(c)(1 - a)$, i.e. $\varphi'(c) = 1$ par le théorème des accroissements finis.
Comme φ' est strictement croissante, on a $m = \varphi'(1) > \varphi'(c) = 1$. Par contraposée, si $m \leqslant 1$, 1 est le plus petit point fixe de φ.
En conclusion, la population s'éteint presque sûrement si et seulement si on a $P(T < +\infty) = 1$ c'est-à-dire si le plus petit point fixe de φ est 1, si et seulement si $m \leqslant 1$.

Ce processus a été introduit par Sir Francis Galton en 1873 pour étudier la statistique des patronymes, et plus particulièrement de leur disparition.

Exercice 15.10 : Une inégalité de concentration

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires discrètes indépendantes de même loi, centrées, à valeurs dans $[-1,1]$.
1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\mathrm{ch}(x) \leqslant \mathrm{e}^{x^2/2}$ (on pourra utiliser les séries entières).
En déduire que pour $\lambda \in \mathbb{R}_+$ et $x \in [-1,1]$, $\mathrm{e}^{\lambda x} \leqslant \mathrm{e}^{\lambda^2/2} + x\,\mathrm{sh}\,\lambda$.
2. Montrer que si X est une variable aléatoire centrée à valeurs dans $[-1,1]$, on a, pour tout $\lambda \geqslant 0$,

$$\mathbf{E}(\mathrm{e}^{\lambda X}) \leqslant \exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\right) \quad \text{et} \quad \mathbf{E}(\mathrm{e}^{-\lambda X}) \leqslant \exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\right).$$

3. Montrer que pour $a \in \mathbb{R}$, $\mathbf{P}(X \geqslant a) \leqslant \mathrm{e}^{-\lambda a}\mathbf{E}(\mathrm{e}^{\lambda X})$ si $\lambda > 0$.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $a \in \mathbb{R}_+$, on a

$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} X_i\right| \geqslant a\right) \leqslant 2\exp\left(-\frac{a^2}{2}\right).$$

1. On suit l'indication et on s'intéresse aux développements en séries entières. On est alors amené à comparer $(2n)!$ et $2^n n!$. Il faut, pour ceci, se souvenir que $2^n n!$ est le produit des entiers pairs entre 1 et $2n$ (comme dans les intégrales de Wallis par exemple).

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$2^n n! = 2^n \prod_{i=1}^{n} i = \prod_{i=1}^{n}(2i) \leqslant \prod_{k=1}^{2n} k = (2n)!.$$

Cette inégalité reste vraie pour $n = 0$, donc pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$\mathrm{ch}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2^n n!} = \exp\left(\frac{x^2}{2}\right).$$

La deuxième inégalité demandée revient alors à montrer que $\mathrm{e}^{\lambda x} \leqslant \mathrm{ch}\,\lambda + x\,\mathrm{sh}\,\lambda$. En utilisant la définition de ch et de sh, cette inégalité devient $\mathrm{e}^{\lambda x} \leqslant \frac{1+x}{2}\mathrm{e}^{\lambda} + \frac{1-x}{2}\mathrm{e}^{-\lambda}$. On retrouve donc une inégalité de convexité.

Comme $x \in [-1,1]$, $t = \dfrac{1+x}{2} \in [0,1]$. Par convexité de la fonction exponentielle, on a donc

$$\exp(t\lambda + (1-t)(-\lambda)) \leqslant t\mathrm{e}^{\lambda} + (1-t)\mathrm{e}^{-\lambda} = \frac{1+x}{2}\mathrm{e}^{\lambda} + \frac{1-x}{2}\mathrm{e}^{-\lambda}.$$

et comme $t\lambda + (1-t)(-\lambda) = (2t-1)\lambda = x\lambda$, le membre de gauche est en fait $e^{\lambda x}$. On en déduit alors que

$$e^{\lambda x} \leqslant \operatorname{ch}\lambda + x\operatorname{sh}\lambda \leqslant \exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\right) + x\operatorname{sh}\lambda.$$

2. La question précédente s'applique à X, qui est à valeurs dans $[-1,1]$, il faut donc simplement utiliser la croissance de l'espérance, après avoir vérifié que l'espérance manipulée existe bien.

Même si l'énoncé ne demande pas explicitement de le montrer, il faut toujours vérifier que les espérances existent bien. Contrairement au cas fini, une variable aléatoire peut ne pas avoir d'espérance.

Notons que comme X est à valeurs dans $[-1,1]$, $e^{\lambda X} \leqslant e^{\lambda}$ donc $e^{\lambda X}$ admet une espérance, puisque pour $x \in X(\Omega)$ (où Ω est l'univers de définition de X), $|e^{\lambda x}|\mathbf{P}(X=x) \leqslant e^{\lambda}\mathbf{P}(X=x)$, et la famille $(\mathbf{P}(X=x))_{x\in\Omega}$ est sommable. Par suite, par croissance de l'espérance, et d'après la question précédente, on a :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(e^{\lambda X}) &\leqslant \mathbf{E}\left[\exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\right) + X\operatorname{sh}(\lambda)\right] = \exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\right) + \operatorname{sh}(\lambda)\mathbf{E}(X)\\ &\leqslant \exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\right)\end{aligned}$$

puisque X est centrée. Comme $-X$ vérifie les mêmes hypothèses que X, on a également

$$\mathbf{E}(e^{-\lambda X}) = \mathbf{E}(e^{\lambda(-X)}) \leqslant \exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\right).$$

3. L'inégalité demandée fait penser à une inégalité de Markov. Il faut simplement réinterpréter l'événement $X \geqslant a$.

Pour $a \in \mathbb{R}$, les événements $\{X \geqslant a\}$ et $\{e^{\lambda X} \geqslant e^{\lambda a}\}$ sont identiques (par croissance d'exponentielle et de $\ln$, et puisque $\lambda > 0$). Ainsi, par l'inégalité de Markov, on a :

$$\mathbf{P}(X \geqslant a) = \mathbf{P}(e^{\lambda X} \geqslant e^{\lambda a}) \leqslant \frac{\mathbf{E}(e^{\lambda X})}{e^{\lambda a}} = e^{-\lambda a}\mathbf{E}(e^{\lambda X}).$$

Cette inégalité, appelée inégalité de Chernov, est très classique.

4. Notons tout d'abord que l'événement $\left\{\left|\frac{1}{\sqrt{n}}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i\right| \geqslant a\right\}$ est la réunion des deux événements $\left\{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i \geqslant \sqrt{n}\,a\right\}$ (car $\sqrt{n} > 0$) et $\left\{\sum\limits_{i=1}^{n} (-X_i) \geqslant \sqrt{n}\,a\right\}$.
Il faut alors combiner les deux questions précédentes avec l'indépendance des X_i.

D'après les deux questions précédentes, on a pour $\lambda > 0$, d'une part :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \geqslant \sqrt{n}a\right) &\leqslant \mathrm{e}^{-\sqrt{n}\lambda a}\mathbf{E}(\mathrm{e}^{\lambda(X_1+\cdots+X_n)})\\ &\leqslant \mathrm{e}^{-\sqrt{n}\lambda a}\mathbf{E}(\mathrm{e}^{\lambda X_1}\ldots\mathrm{e}^{\lambda X_n})\\ &\leqslant \mathrm{e}^{-\sqrt{n}\lambda a}\mathbf{E}(\mathrm{e}^{\lambda X_1})\ldots\mathbf{E}(\mathrm{e}^{\lambda X_n})\\ &\leqslant \mathrm{e}^{-\sqrt{n}\lambda a}\exp\left(n\frac{\lambda^2}{2}\right)\end{aligned}$$

puisque $\mathrm{e}^{\lambda X_1},\ldots,\mathrm{e}^{\lambda X_n}$ sont indépendantes. D'autre part, on a de même :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{n} (-X_i) \geqslant \sqrt{n}a\right) &\leqslant \mathrm{e}^{-\sqrt{n}\lambda a}\mathbf{E}(\mathrm{e}^{\lambda(-X_1-\cdots-X_n)})\\ &\leqslant \mathrm{e}^{-\sqrt{n}\lambda a}\mathbf{E}(\mathrm{e}^{-\lambda X_1}\ldots\mathrm{e}^{-\lambda X_n})\\ &\leqslant \mathrm{e}^{-\sqrt{n}\lambda a}\mathbf{E}(\mathrm{e}^{-\lambda X_1})\ldots\mathbf{E}(\mathrm{e}^{-\lambda X_n})\\ &\leqslant \mathrm{e}^{-\sqrt{n}\lambda a}\exp\left(n\frac{\lambda^2}{2}\right)\end{aligned}$$

Ainsi, par sous-additivité de $\mathbf{P}$,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left(\left|\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} X_i\right| \geqslant a\right) &\leqslant \mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \geqslant a\right) + \mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{n} (-X_i) \geqslant a\right)\\ &\leqslant 2\exp\left(-\sqrt{n}\lambda a + n\frac{\lambda^2}{2}\right).\end{aligned}$$

On cherche alors pour quelle valeur de $\lambda \in \mathbb{R}_+$ la fonction

$$f : \lambda \mapsto -\sqrt{n}\lambda a + n\frac{\lambda^2}{2}$$

admet son minimum. f est dérivable car polynomiale, et pour $\lambda \in \mathbb{R}_+$, on a $f'(\lambda) = -a\sqrt{n}+\lambda n$, donc f' est positive sur $\left[\frac{a}{\sqrt{n}}, +\infty\right[$, négative sur $\left[0, \frac{a}{\sqrt{n}}\right]$.
f admet donc un minimum en $\frac{a}{\sqrt{n}}$, avec $f\left(\frac{a}{\sqrt{n}}\right) = -\frac{a^2}{2}$.
On a donc finalement (l'inégalité étant triviale si $a = 0$) :

$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} X_i\right| \geqslant a\right) \leqslant 2\exp\left(-\frac{a^2}{2}\right).$$

Cette inégalité est plus précise que l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, et ne fait pas intervenir la variance des X_i (qui sont bornés entre -1 et 1 en revanche). Elle exprime le fait que la somme de ces X_i reste concentrée (en moyenne) dans l'intervalle $[-\sqrt{n}\,a, \sqrt{n}\,a]$ si a est assez grand.

Exercice 15.11 : Théorème de Weierstrass

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,1]$, on se donne $X_{n,x}$ une variable aléatoire suivant la loi $\mathscr{B}(n,x)$. On se donne $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, et on note

$$Y_{n,x} = f\left(\frac{X_{n,x}}{n}\right) \text{ pour } x \in [0,1].$$

1. Montrer qu'il existe $B_n(f) \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall x \in [0,1]$, $\mathbf{E}(Y_{n,x}) = B_n(f)(x)$.
Soit $\varepsilon > 0$.
2. Montrer que

$$|B_n(f)(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon + 2\|f\|_\infty \mathbf{P}(|Y_{n,x} - f(x)| \geqslant \varepsilon)$$

puis qu'il existe $\eta > 0$ tel que

$$|B_n(f)(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon + 2\|f\|_\infty \mathbf{P}(|X_{n,x} - nx| \geqslant n\eta).$$

3. En déduire que

$$|B_n(f)(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon + \frac{\|f\|_\infty}{2n\eta^2}$$

puis que $(B_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

1. Il s'agit d'un simple calcul d'espérance, via le théorème de transfert.

On a, par le théorème de transfert,

$$\begin{aligned} Y_{n,x} = \mathbf{E}\left[f\left(\frac{X_{n,x}}{n}\right)\right] &= \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\mathbf{P}(X_{n,x} = k) \\ &= \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = B_n(f)(x) \end{aligned}$$

où l'on a noté

$$B_n(f) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}X^k(1-X)^{n-k},$$

qui est bien un polynôme à coefficients réels.

2. Il s'agit de majorer l'espérance de $Y_{n,x} - f(x)$. Cette espérance est une somme finie dans laquelle on va séparer les termes $|y - f(x)|$ qui sont plus petits que ε (ce qui donnera le terme en ε) des termes qui sont plus grands que ε (ce qui donnera la probabilité).

Notons Ω l'univers de travail et $A = \{y \in Y_{n,x}(\Omega)\,;\, |y - f(x)| \geqslant \varepsilon\}$. On a :

$$\begin{aligned}
|B_n(f)(x) - f(x)| &= |\mathbf{E}(Y_{n,x}) - f(x)| = |\mathbf{E}(Y_{n,x} - f(x))| \\
&= \left| \sum_{y \in Y_{n,x}(\Omega)} (y - f(x))\mathbf{P}(Y_{n,x} = y) \right| \\
&\leqslant \sum_{y \in Y_{n,x}(\Omega)} |y - f(x)|\mathbf{P}(Y_{n,x} = y) \\
&= \sum_{y \in \overline{A}} |y - f(x)|\mathbf{P}(Y_{n,x} = y) + \sum_{y \in A} |y - f(x)|\mathbf{P}(Y_{n,x} = y) \\
&\leqslant \sum_{y \in \overline{A}} \varepsilon \mathbf{P}(Y_{n,x} = y) + \sum_{y \in A} (|y| + |f(x)|)\mathbf{P}(Y_{n,x} = y) \\
&\leqslant \varepsilon \mathbf{P}(\overline{A}) + 2\|f\|_\infty \mathbf{P}(A) \\
&\leqslant \varepsilon + 2\|f\|_\infty \mathbf{P}(|Y_{n,x} - f(x)| \geqslant \varepsilon)
\end{aligned}$$

où, si $y \in Y_{n,x}(\Omega)$, $y = f(u)$ avec $u \in \dfrac{1}{n} X_{n,x}(\Omega)$, donc $|y| \leqslant \|f\|_\infty$.

Il nous faut ensuite majorer $\mathbf{P}(|Y_{n,x} - f(x)| \geqslant \varepsilon)$ par $\mathbf{P}(|X_{n,x} - nx| \geqslant n\eta)$, où $\eta > 0$ est à déterminer.
La variable $Y_{n,x}$ étant définie par $f\left(\frac{X_{n,x}}{n}\right)$, on cherche finalement un $\eta > 0$ tel que $|f\left(\frac{X_{n,x}}{n}\right) - f(x)| \geqslant \varepsilon$ implique $\left|\frac{X_{n,x}}{n} - x\right| \geqslant \eta$.
C'est la contraposée de la définition du module d'uniforme continuité.

La fonction f est continue sur $[0, 1]$, donc y est uniformément continue. On a donc $\eta > 0$ tel que pour tout $(a, b) \in [0, 1]^2$, $|a - b| < \eta \Rightarrow |f(a) - f(b)| < \varepsilon$, ou, par contraposée, $|f(a) - f(b)| \geqslant \varepsilon \Rightarrow |a - b| \geqslant \eta$.
Ainsi l'événement $\left| f\left(\dfrac{X_{n,x}}{n}\right) - f(x) \right| \geqslant \varepsilon$ implique $\left| \dfrac{X_{n,x}}{n} - x \right| \geqslant \eta$ puis

$$\mathbf{P}(|Y_{n,x} - f(x)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \mathbf{P}\left(\left| \frac{X_{n,x}}{n} - x \right| \geqslant \eta \right) = \mathbf{P}(|X_{n,x} - nx| \geqslant n\eta).$$

On en déduit aisément l'inégalité voulue.

3. On cherche maintenant à majorer $\mathbf{P}(|X_{n,x} - nx| \geqslant n\eta)$. Comme $X_{n,x}$ a pour espérance nx. Il faut donc appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Comme $X_{n,x}$ suit la loi binomiale de paramètre x, $\mathbf{E}(X_{n,x}) = nx$. Ainsi, par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, comme $\mathbf{V}(X_{n,x}) = nx(1-x)$, on a :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(|X_{n,x} - nx| \geqslant n\eta) = \mathbf{P}(|X_{n,x} - \mathbf{E}(X_{n,x})| \geqslant n\eta) &\leqslant \frac{\mathbf{V}(X_{n,x})}{(n\eta)^2}\\ &\leqslant \frac{nx(1-x)}{n^2\eta^2} \leqslant \frac{1}{4n\eta^2}\end{aligned}$$

puisque la fonction $h : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x(1-x)$ atteint son maximum en $x = \dfrac{1}{2}$ (sa dérivée ne s'annule qu'en ce point et $h(0) = h(1) = 0$) avec $h\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{4}$.
Au final, on a donc

$$|B_n(f)(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon + \frac{\|f\|_\infty}{2n\eta^2}.$$

On ne peut pas conclure immédiatement, il faut utiliser la définition de la limite pour majorer le second terme par ε.

Comme

$$\frac{\|f\|_\infty}{2n\eta^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

on a $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $\dfrac{\|f\|_\infty}{2n\eta^2} \leqslant \varepsilon$.
Ainsi pour tout $n \geqslant N$ et tout $x \in [0,1]$, on a $|B_n(f)(x) - f(x)| \leqslant 2\varepsilon$, donc la suite $(B_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

On peut en déduire le théorème de Weierstrass sur n'importe quel segment $[a,b]$, en composant avec la fonction $g : t \mapsto a + t(b-a)$, qui est une bijection de $[0,1]$ sur $[a,b]$, ou sa réciproque.

Index